

## §2. 行列の積とその性質

2つの数に対して足し算や掛け算を計算できたように、行列に対しても足し算や掛け算を計算することができる。ここでは、特に重要な掛け算の定義と性質を学ぶ。行列の積は実数の積と類似の性質を持つ部分が多いが、いくつか異なる点もある。

### ● 2-1 : 行列の積の定義

前回、連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

について、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  を、例えば、

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

のように変化させていったときの  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  の値の変化の様子を見るには、

$$(2-1 a) \quad A(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) = (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ A\mathbf{b}_3 \ A\mathbf{b}_4)$$

と約束しておく、1つの式で表わすことができ、便利であることを述べた。

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4)$$

とおくと、(2-1 a) は

$$(2-1 b) \quad AB = (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ A\mathbf{b}_3 \ A\mathbf{b}_4)$$

と書き換えられて、2つの行列  $A, B$  の積の定義式と解釈することができる。

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

とおくと、

$$A\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + a_{13}b_{3j} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + a_{23}b_{3j} \\ a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + a_{33}b_{3j} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(AB \text{ の } (i, j)\text{-成分}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

と表わされることがわかる。これを代入して、 $AB$  を成分で具体的に書くと次のようになる：

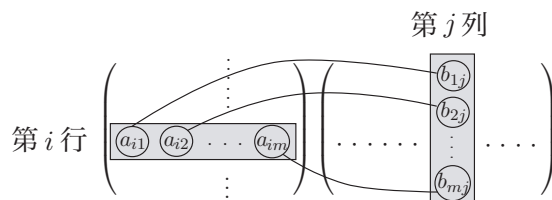
$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & \cdots & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & \cdots & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & \cdots & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + a_{33}b_{34} \end{pmatrix}.$$

上記の事実を背景に、一般に、 $(l, m)$ -行列  $A = (a_{ik})_{i,k}$  と  $(m, n)$ -行列  $B = (b_{kj})_{k,j}$  に対して、 $A$  と  $B$  の積  $AB$  を

$$(2-1 c) \quad AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

但し、 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$

によって定義する。 $AB$  は  $(l, n)$ -行列である。



**注意：**積  $AB$  は行列  $A$  の列の数と行列  $B$  の行の数的一致しているときのみ定義される。

**例 2-1-1** 2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  に対して、積  $AB$  は

$$(2-1 d) \quad AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

によって定義される。 $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2)$  とおくと、 $AB = (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2)$  と表わされる。

例えば、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$  に対して、 $AB = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -6 & 28 \end{pmatrix}$ .

**例 2-1-2**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  に対して、 $AB = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ -16 & -6 & 22 \end{pmatrix}$  である。

一方、 $(B$  の列の数)  $= 3 \neq 2 = (A$  の行の数) なので、積  $BA$  は定義されない。 □

### ● 2-2 : 行列の積の性質

行列の積は、積  $AB$  と  $BA$  の両方が定義できたとしても、一般に  $AB \neq BA$  であり、実数の積とは違う性質を持つ。

**例 2-2-1**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$  に対して、

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -6 & 28 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

$AB$  と  $BA$  の  $(1,1)$ -成分は異なるので、 $AB \neq BA$  である。 □

しかし、次の補題に記されているように、実数と似た性質も持っている。

#### 補題 2-2-2

行列の積は以下の性質を持つ。

(1) (結合法則) 行列  $A, B, C$  に対して、積  $AB$  および  $BC$  が定義されるとき、

$$(2-2 a) \quad (AB)C = A(BC).$$

(2) 対角成分が 1 で、残りの成分がすべて 0 であるような  $n$  次正方行列

$$(2-2 \text{ b}) \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

は、任意の  $(m, n)$ -行列  $A$  と任意の  $(n, l)$ -行列  $B$  に対して、

$$(2-2 \text{ c}) \quad AE_n = A, \quad E_n B = B$$

を満たす。したがって、 $E_n$  は実数の 1 の役割を果たす。 $E_n$  を  $n$  次単位行列という。

(証明)

(2) は積の定義通りに計算すればわかるので、(1) を示そう。仮定により、積  $AB$  および  $BC$  を考えることができるので、 $B$  を  $(m, n)$ -行列とおくと、 $A, C$  はそれぞれ  $(l, m)$ -行列、 $(n, p)$ -行列の形となる。 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$  とおく。このとき、

$$(AB)C = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{im}b_{m1}}} \\ a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{im}b_{m1} & \cdots & a_{i1}b_{1n} + \cdots + a_{im}b_{mn} \\ \boxed{\phantom{a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{im}b_{m1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{c_{1j}}} & c_{1j} & \boxed{\phantom{c_{1j}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{\phantom{c_{1j}}} & c_{nj} & \boxed{\phantom{c_{1j}}} \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{a_{i1}}} & \cdots & \boxed{\phantom{a_{im}}} \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \boxed{\phantom{a_{i1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{b_{11}c_{1j} + \cdots + b_{1n}c_{nj}}} & b_{11}c_{1j} + \cdots + b_{1n}c_{nj} & \boxed{\phantom{b_{11}c_{1j} + \cdots + b_{1n}c_{nj}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{\phantom{b_{11}c_{1j} + \cdots + b_{1n}c_{nj}}} & b_{m1}c_{1j} + \cdots + b_{mn}c_{nj} & \boxed{\phantom{b_{11}c_{1j} + \cdots + b_{1n}c_{nj}}} \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} ((AB)C \text{ の } (i, j)\text{-成分}) &= \begin{pmatrix} (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{im}b_{m1})c_{1j} \\ + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{im}b_{m2})c_{2j} \\ + \cdots \\ + (a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \cdots + a_{im}b_{mn})c_{nj} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i2}b_{21}c_{1j} + \cdots + a_{im}b_{m1}c_{1j} \\ + a_{i1}b_{12}c_{2j} + a_{i2}b_{22}c_{2j} + \cdots + a_{im}b_{m2}c_{2j} \\ + \cdots \\ + a_{i1}b_{1n}c_{nj} + a_{i2}b_{2n}c_{nj} + \cdots + a_{im}b_{mn}c_{nj} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1n}c_{nj}) \\ + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2n}c_{nj}) \\ + \cdots \\ + a_{im}(b_{m1}c_{1j} + b_{m2}c_{2j} + \cdots + b_{mn}c_{nj}) \end{pmatrix} \\ &= (A(BC) \text{ の } (i, j)\text{-成分}) \end{aligned}$$

となる。よって、定理は証明された。  $\square$

**例 2-2-3**  $(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 + 2axy + y^2 + 2bx + 2cy + 1.$

● 2-3 : 零行列

$$(0), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように、すべての成分が0であるような行列を**零行列**と呼ぶ。通常、零行列はすべて記号  $O$  を使って書き表わす。

零行列に(積が定義可能な)どのような行列を掛けても零行列であり、零行列は実数の0と同じ役割りを果たす。しかしながら、 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  に対して、 $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  となるように、 $A \neq O$ ,  $B \neq O$  であっても、 $AB = O$  となることがあり得る。これもまた、実数の積では起こり得ない、行列の積に特有の性質である。

### ● 2-4 : 転置行列

$(m, n)$ -行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  に対して、その行と列を入れ換えて得られる

$(n, m)$ -行列

$$(2-4 \text{ a}) \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を  $A$  の**転置行列**という。

**注意:** 転置行列  $A^T$  は、教科書では  $tA$  と記されている。この記号を用いてもよいが、どちらかに統一して使うこと。この授業では、次回説明する行列の  $t$  倍との混乱を避けるため、 $A^T$  を用いる。

**例 2-4-1** 行列  $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$  について  $A^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -4\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

転置行列は次の性質を持つ。

#### 補題 2-4-2

(1) 行列  $A, B$  に対して、積  $AB$  が定義されるとき、積  $B^T A^T$  が定義され

$$(2-4 \text{ b}) \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

(2)  $n$  次単位行列  $E_n$  に対して、 $(E_n)^T = E_n$ .

(3) 行列  $A$  に対して、 $(A^T)^T = A$ .

(証明)

転置行列の定義から、(2), (3) はすぐに成立することがわかるから、(1) を示す。

$A = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq k \leq m}}$ ,  $B = (b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  とおくと、 $A^T = (a_{ik})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq l}}$ ,  $B^T = (b_{kj})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}$  となる。積の定義より、 $(AB)^T$  と  $B^T A^T$  のサイズはともに  $(n, l)$  であり、任意の  $i, j$  ( $1 \leq i \leq l$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) に対して

$$\begin{aligned} (B^T A^T \text{ の } (j, i)\text{-成分}) &= b_{1j} a_{i1} + b_{2j} a_{i2} + \cdots + b_{mj} a_{im} \\ &= (AB \text{ の } (i, j)\text{-成分}) = ((AB)^T \text{ の } (j, i)\text{-成分}) \end{aligned}$$

である。よって、 $(AB)^T = B^T A^T$  が成り立つ。  $\square$

## 線形代数1 事前練習用演習問題

pre2-1. (2次正方行列の積)

2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) 積  $AB$  および  $BA$  を計算せよ。(答えのみは不可。計算方法がわかるように解答すること。)
- (2)  $AB = BA$  か? 理由をつけて答えよ。

pre2-2. (行列の積と転置行列)

行列  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  について以下の問いに答えよ。

- (1) 転置行列  $A^T$  を求めよ。
- (2) 積  $A^T A$  と  $AA^T$  を計算せよ。

## ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre2-1. [例2-1-1], [例2-2-1]を参照して、容易に解答することができる。積の計算過程は略す。

$$(1) AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) (1)より、 $AB$  と  $BA$  の (1,1)-成分はそれぞれ0と-6であり、異なる。よって、 $AB \neq BA$  である。

pre2-2. 転置行列の定義と行列の積の定義に基づいて、容易に解答することができるので、ここでは答えのみ記す。転置行列と行列の積を計算する前に、それらのサイズを最初に調べておくとい。

$$(1) A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^T A = \begin{pmatrix} 14 & -20 \\ -20 & 29 \end{pmatrix}, AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 11 \\ -8 & 13 & -18 \\ 11 & -18 & 25 \end{pmatrix}.$$

## 線形代数1・第2回(2026年4月16日)演習問題事前練習シート

---

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
単位行列とは？	p.	
零行列とは？	p.	

Q2. 次の  に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  と  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$  に対して

$AB =$

- 行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$  と  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  に対して

$AB =$

- $(m, n)$ -行列  $A$  と  $(m', n')$ -行列  $B$  について積  $AB$  を考えることができるのは、 のときに限る。このとき、行列  $AB$  のサイズは  である。
- 行列  $B$  を列ベクトルにより  $B = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n)$  と表わすとき、積  $AB$  は  $AB =$   のように計算される。
- $(l, m)$ -行列  $A = (a_{ik})$  と  $(m, n)$ -行列  $B = (b_{kj})$  の積  $AB$  の  $(i, j)$ -成分は

で与えられる。

- $(3, 4)$ -行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$  に対して

$A^T =$

Q3. 第2回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。