§2. ユークリッド空間

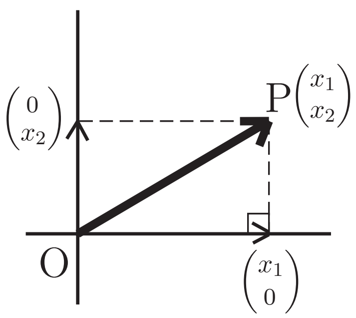
　ここでは、内積の指定された数ベクトル空間、すなわち、ユークリッド空間について考える。内積は、幾何学的には、２つのベクトルのなす角 (の大きさ) を表わす。前半ではこのことを説明し、ベクトルの直交条件を調べる。前節では、数ベクトル空間に対する基底の概念が導入された。ユークリッド空間に対しては内積と相性のよい基底—互いに直交し、かつ、長さが 1 のベクトルからなる基底—を用いた方が便利である。後半では、正規直交基底と呼ばれるこのような基底の例と性質を扱う。

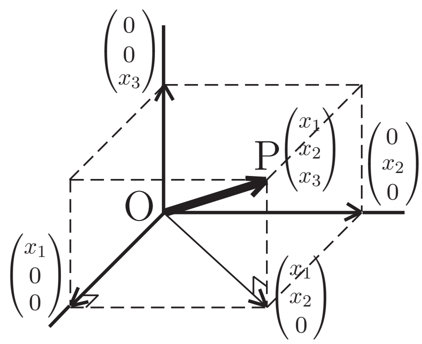
● 2-1：内積と長さ

　n 次列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ の**長さ**または**ノルム**とは、

(2-1 a)
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

によって与えられる実数 $\|\mathbf{x}\|$ のことをいう。





　$n = 2$ のとき、長さ $\|\mathbf{x}\|$ は、原点 O $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と点 P $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を結ぶ線分の長さのことに他ならない。同様に、$n = 3$ のとき、長さ $\|\mathbf{x}\|$ は、原点 O $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と点 P $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を結ぶ線分の長さのことに他ならない。

　２つのベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

(2-1 b)
$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ \left(= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ とも書ける}\right)$$

を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の**内積**という。この内積が指定された数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を n 次元**ユークリッド空間**と呼ぶ。この講義においては、$\mathbb{R}^n$ と書いて n 次元数ベクトル空間を表したり、n 次元ユークリッド空間を表したりするが、前後の文脈から、どちらの意味で記号を使っているのか明確な場合にはいちいち断らない。

　内積は次の性質を持つ。

補題 2 - 1 - 1

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{x} \rangle \geq 0$ であり、

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(2) $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y},\ \mathbf{x} \rangle$.

(3) $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1,\ \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y} \rangle,\ \ \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_1 \rangle + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_2 \rangle$.

(4) $\langle t\mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x},\ t\mathbf{y} \rangle = t\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle$.

(5) 任意の $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y},\ \mathbf{z} \rangle$ であるとき、$\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(証明)

(5) 以外は定義から簡単に示すことができるので、ここでは (5) のみ示す。

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とおく。“$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$” を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とすると、各 $i = 1, \cdots, n$ に対して $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = x_i,\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_i \rangle = y_i$ であるから、任意の $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ ならば、$x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_i \rangle = y_i$ となる。したがって、$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ である。 □

注意. 上の補題の (5) より、次が成立することがわかる：“$\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n$” を $\mathbb{R}^n$ の基底とする。2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について、

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

であれば、$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ である。

● 2 - 2 : 内積の幾何学的意味

零でないベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して、平面上の点 X, Y を $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \mathbf{x},\ \overrightarrow{\mathrm{OY}} = \mathbf{y}$ となるようにとる。但し、O は原点を表わす。このとき、角度 $\angle \mathrm{XOY}$ をベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ の**なす角**と呼ぶ。ここで、角度 θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で考える。

内積 $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle$ は、幾何学的には、2 つのベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ のなす角を表わしている。

補題 2 - 2 - 1

零でないベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して、それらのなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|}. \tag{2 - 2 a}$$

(証明)

O を原点とし、X, Y を $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \mathbf{x},\ \overrightarrow{\mathrm{OY}} = \mathbf{y}$ となる点とする。

● Y が直線 OX 上にあるとき：$\mathbf{y} = t\mathbf{x}$ $(t \neq 0)$ と書ける。((2 - 2 a) の右辺) $= \frac{t}{|t|} = \pm 1$ となる (符号は $t > 0$ のとき $+$ をとり、$t < 0$ のときには $-$ をとる)。$t > 0$ のときは $\theta = 0$ であり, $t < 0$ のときは $\theta = \pi$ であるから、等式 (2 - 2 a) は成り立つ。

● Y が直線 OX 上にないとき：3 点 O, X, Y を頂点とする三角形 $\triangle \mathrm{XOY}$ を考えることができる。$\angle \mathrm{XOY} = \theta$ であるから、三角形 $\triangle \mathrm{XOY}$ に余弦定理を適用すると、

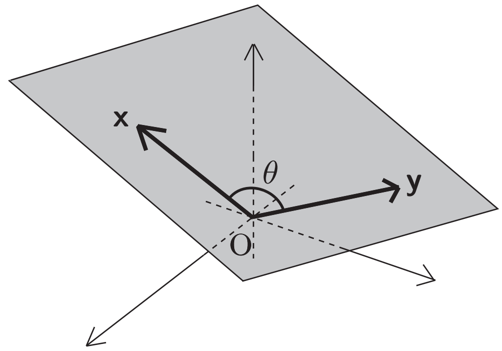
$$\mathrm{XY}^2 = \mathrm{OX}^2 + \mathrm{OY}^2 - 2\mathrm{OX} \cdot \mathrm{OY} \cdot \cos\theta \tag{2 - 2 b}$$

が成り立つ。$\overrightarrow{\mathrm{XY}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ の長さの 2 乗をとると、

$$\mathrm{XY}^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

と書けることがわかる。この式を (2 - 2 b) に代入すると、等式 (2 - 2 a) が得られる。 □

一般に n 次列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対しても、これらのベクトルによって張られる平面上で同様の考察を行うことにより、なす角が定義され、上の補題と同じ結果が成り立つ。



例 2-2-2 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して、$\|\mathbf{x}\| = 2,\ \|\mathbf{y}\| = \sqrt{2},\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -2$ であるから、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。したがって、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角は $\theta = \frac{3}{4}\pi$ である。 □

● 2-3：ベクトルの直交条件

零でない２つの n 次列ベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ のなす角が $\frac{\pi}{2}$ のとき、$\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ は**直交する**と呼ばれる。便宜上、零ベクトルは任意のベクトルに直交すると考える。すると、[補題 2-2-1] およびその n 次元版により、n 次列ベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ に対して次の言い換えが可能である：

(2-3 a) $$\mathbf{x},\ \mathbf{y} \text{ は直交する} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

● 2-4：正規直交基底

$\mathbb{R}^n$ に内積が導入されている状況においては、$\mathbb{R}^n$ の基底として、「碁盤の目」のような座標系を与えるもの、つまり、互いに直交し、長さ１のベクトルからなる基底を選んだ方が便利なことが多い。このような基底は正規直交基底と呼ばれる。

定義 2-4-1

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の基底 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が次の条件を満たすとき、**正規直交基底**であると呼ばれる：

(2-4 a) $$\langle \mathbf{v}_i,\ \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, n).$$

ここで、δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ**であり、これは次のように定義される実数である：

(2-4 b) $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

例 2-4-2 (1) $\mathbb{R}^n$ の標準基底 "$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$" は正規直交基底である。

(2) $\mathbb{R}^2$ の基底 "$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$" は正規直交基底である。

● 2-5：直交と一次独立

$\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトルの列 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が正規直交基底であることを示すには、その定義から、この列が $\mathbb{R}^n$ の基底であって、かつ、(2-4 a) を満たすことを示さなければならないが、実は、(2-4 a) を満たせば、自動的に $\mathbb{R}^n$ の基底になることが次の補題からわかる。

補題 2-5-1
零ベクトルでない $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ が互いに直交しているならば、これらは一次独立である。

(**証明**)
$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ $(t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R})$ とおく。各 $i = 1, \cdots, k$ に対してこの両辺と $\mathbf{v}_i$ との内積をとると、$j \neq i$ に対して $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ であるから、$t_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ となる。$\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ であるから $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ である。よって、$t_i = 0$ を得る。 □

上の補題と [定理 1-4-3] の①と③の同値性より、直ちに次の結果を得る。

系 2-5-2
$\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ に対して

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \iff \text{“}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\text{” は } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交基底.}$$

例 2-5-3 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ となることがわかる。よって、"$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$" は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である。

ベクトルを正規直交基底の一次結合で書くことは、次の補題が示すように、易しい。

補題 2-5-4
"$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする。このとき、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は

(2-5 a) $$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

と書き表わされる。

(**証明**)
$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n$ $(t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R})$ と書く。このとき、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = t_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = t_i$ となる。よって、$\mathbf{x}$ は (2-5 a) のように正規直交基底 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" の一次結合で書き表わされる。 □

例 2-5-5 [例 2-5-3] で与えられている $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 "$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$" を考える。このとき、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b)\mathbf{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}(-a-b+2c)\mathbf{v}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\mathbf{v}_3$$

と表わされる。 □

No.2 2024年10月3日

線形代数2事前練習用演習問題

pre2-1. (ベクトルのなす角および直交条件)

$\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ のなす角を求めよ。

(2) $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ の両方に直交するような $\mathbb{R}^3$ のベクトルをすべて求めよ。

pre2-2. (正規直交基底)

$\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) “$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$” は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを示せ。

(2) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ を “$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$” の一次結合で表わせ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre2-1. (1) $\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle=-3$ であり、$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{6},\ \|\mathbf{y}\|=\sqrt{2}$ であるから、$\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ のなす角を $\theta\ (0\leq\theta\leq\pi)$ とおくと、$\cos\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。したがって、$\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ のなす角は $\dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2) 求めるベクトルを $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおいて、$\langle\mathbf{x},\ \mathbf{a}\rangle=\langle\mathbf{y},\ \mathbf{a}\rangle=0$ を満たす x,y,z について解いてもよいが、外積を利用してもよい。ここでは、後者の方法での略解を記す。

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

であり、これは $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ の両方に直交するような $\mathbb{R}^3$ のベクトルの 1 つである。“$\mathbf{x},\ \mathbf{y}$” は1次独立なので、両方に直交する $\mathbf{0}$ でないベクトルが 1 つ見つかれば、両方に直交するその他のベクトルはそのスカラー倍である。したがっって、求めるベクトルは、

$$t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

により与えられる。

pre2-2. (1) $\langle\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1\rangle=\langle\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2\rangle=\langle\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_3\rangle=1$ かつ $\langle\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\rangle=\langle\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_3\rangle=\langle\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\rangle=0$ となることを確かめればよい。

(2) "$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$" は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底なので、$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_3 \rangle \mathbf{u}_3$ のように表わされる。よって、$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_i \rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ を計算すればよい。その結果、

$$\mathbf{x} = \frac{a + 2b + 2c}{3} \mathbf{u}_1 + \frac{2a - 2b + c}{3} \mathbf{u}_2 + \frac{2a + b - 2c}{3} \mathbf{u}_3$$

のように表わされることがわかる。

線形代数２・第２回 (2024 年 10 月 3 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第２回学習内容チェックシート 2024 年 10 月 3 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- n 次列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、長さ $\|\mathbf{x}\|$ および内積 $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle$ は

  $$\|\mathbf{x}\| = \boxed{}, \qquad \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \boxed{}$$

  により定義される。
- n 次列ベクトル $\mathbf{x}$ に対し、$\|\mathbf{x}\|^2$ は内積を用いて $\|\mathbf{x}\|^2 = \boxed{}$ と表わされる。
- n 次列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ は公式 $\cos\theta = \boxed{}$ を用いて求めることができる。
- n 次列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が直交するのは、$\boxed{} = 0$ となるときである。
- n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトルの組 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が正規直交基底であるとは、
  ① これが $\mathbb{R}^n$ の基底をなしていて、
  ② $\boxed{} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$
  が成り立つときをいう。ここで、δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、これは次のように定義される数である：

  $$\delta_{ij} = \boxed{}.$$

  零ベクトルでない k 個のベクトルが互いに $\boxed{}$ していれば、一次独立になるので、② が成り立てば自動的に①が成り立つ。
- "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であるとき、任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" の一次結合として次のように表わされる：

  $$\mathbf{x} = \boxed{}$$

Q2. $\mathbb{R}^n$ の内積は次の性質を持つ：任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y},\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して、

- $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y} \rangle = \boxed{} + \boxed{}$,
  $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle = \boxed{} + \boxed{}$.
- $\langle t\mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x},\ t\mathbf{y} \rangle = \boxed{}$.

Q3. $\mathbb{R}^3$ のベクトル "$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$" が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを示すにはどのような等式が成り立つことを確かめればよいか。確かめるべき等式をすべて書きなさい。

$$\boxed{}$$

Q4. 第２回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。