§2. エルミート内積

前節では実ベクトル空間上に内積を導入した。ここでは、複素ベクトル空間上に同様の概念を導入し、その性質を調べる。

今後、$\mathbb{C}$ は複素数全体からなる集合を表わす。

● 2-1：複素ベクトル空間とその部分空間

エルミート内積について述べる前に、この授業において中心的な考察の対象である、複素ベクトル空間とその部分空間の定義を書いておく。なお、以下の定義において $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えると実ベクトル空間とその部分空間の定義になる。

集合 $V(\neq \varnothing)$ に、**和** (または**加法**) と呼ばれる写像 $+ : V \times V \longrightarrow V,\ (u,v) \longmapsto u+v$ と、**スカラー倍** (または**作用**) と呼ばれる写像 $\cdot : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V,\ (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v$ が与えられていて以下の条件を満たすとき、これらの 2 つの写像を備えた集合 V (正確には組 $(V, +, \cdot)$) を $\mathbb{C}$ 上の**ベクトル空間**または**複素ベクトル空間**という。

(VS1) 任意の $u, v, w \in V$ および任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して
- (i) $(u+v)+w = u+(v+w)$.
- (ii) $u+v = v+u$.
- (iii) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
- (iv) $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.
- (v) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.
- (vi) $1 \cdot v = v$.

(VS2) 次の条件を満たす元 $0_V \in V$ が存在する：任意の $v \in V$ に対して、
$$v + 0_V = v = 0_V + v.$$

(VS3) 任意の $v \in V$ に対して次の条件を満たす元 $x \in V$ が存在する：
$$v + x = x + v = 0_V \quad (\text{但し、} 0_V \text{ は (VS2) と同じ } V \text{ の元}).$$

ベクトル空間 V の元を V の**ベクトル**と呼び、特に、(VS2) におけるベクトル 0_V を V の**零ベクトル**という。各 $v \in V$ に対して (VS3) を満たす x は一意的であり、これは $x = (-1) \cdot v$ により与えられる。x を $-v$ と記す。$u, v \in V$ に対して $u - v := u + (-v)$ と定める。また、実ベクトル空間のときと同様に、スカラー倍を表わす $\cdot$ は略されることが多い。

V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし、W を V の部分集合とする。W が V の**部分 (ベクトル) 空間**であるとは、以下の 3 つの条件が成り立つときをいう。

(SS0) $0_V \in W$.

(SS1) 任意の $w, w' \in W$ に対して、$w + w' \in W$.

(SS2) 任意の $w \in W$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して、$\alpha w \in W$.

部分空間は、和とスカラー倍をその空間上に制限することで、$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる。

● 2-2：エルミート内積の定義

複素ベクトル空間 V において、内積をどのように定義すべきかを考える。

$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ を前節で定義した意味での内積とすると、任意の $u, v \in V$ に対して
$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\langle u+v, u+v \rangle - \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle)$$
と書けるから、$\langle u, v \rangle$ は実数でなければいけなくなる。しかし、虚数単位 i に対して $\langle v, iv \rangle = i\langle v, v \rangle$ となるから、$v \neq 0_V$ なら $\langle v, iv \rangle$ は虚数となる。このように、複素ベクトル空間の場合

に、内積を実ベクトル空間と同じように定義してしまうと、困った状況が生じる。ベクトルの長さや 2 つのベクトルの間の距離が意味を持つようにするために、複素ベクトル空間の場合には、以下のように定義されるエルミート内積を考える。

複素数 α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ と記す。$\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ のとき、$\overline{\alpha} = a - ib$ である。

定義 2-2-1

V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。写像 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を V 上の**エルミート内積**といい、組 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を**エルミート計量空間**という。

(HP1) (**エルミート双線形性**) 任意の $v, v_1, v_2, u, u_1, u_2 \in V$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

- $\langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle$, $\quad \langle \alpha v, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle$.
- $\langle v, u_1 + u_2\rangle = \langle v, u_1\rangle + \langle v, u_2\rangle$, $\quad \langle v, \alpha u\rangle = \overline{\alpha}\langle v, u\rangle$.

(HP2) (**エルミート対称性**) 任意の $v, u \in V$ に対して $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$.

(HP3) (**正定値性**) 任意の $v \in V$ に対して $\langle v, v\rangle \geq 0$ であり、

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0_V.$$

注意 1. 任意の $v \in V$ に対して $\langle v, 0_V\rangle = \langle 0_V, v\rangle = 0$ が成り立つ。

注意 2. V をエルミート計量空間とする、という言い方をするときがある。この場合には、$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V にエルミート内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が 1 つ指定されているものとする。

注意 3. 正定値性から、エルミート内積は次の性質も持つことがわかる。

(HP4) (**非退化性**) $v \in V$ が任意の $u \in V$ に対して $\langle v, u\rangle = 0$ を満たせば、$v = 0_V$ である。

これより、V の基底 “$u_1, \cdots, u_n$” に対して 2 つのベクトル $v, v' \in V$ が $\langle v, u_i\rangle = \langle v', u_i\rangle$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たせば、$v = v'$ であることがわかる。

注意 4. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ をエルミート計量空間とし、W を V の部分空間とする。このとき、W は $\langle\ ,\ \rangle$ の定義域を $W \times W$ に制限することにより、W 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle|_{W\times W}$ が定義される。エルミート計量空間 $(W, \langle\ ,\ \rangle|_{W\times W})$ を $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ の**エルミート計量部分空間**という。特に断らない限り、エルミート計量空間の部分空間は、このような内積を持つエルミート計量 (部分) 空間と考える。

例 2-2-2 $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{C},\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{C} \right\}$ は、成分ごとに和をとる写像と複素数倍する写像を指定することで、複素ベクトル空間となる。$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して

(2-2 a) $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

とおく。$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積である。これを $\mathbb{C}^n$ の通常のエルミート内積と呼ぶ。

例 2-2-3 複素 (m, n)-行列全体 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{C})$ は、行列の和とスカラー倍に関して複素ベクトル空間となる。写像 $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

(2-2 b) $$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^* A) \qquad (A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{C}))$$

によって定義する。但し、$B^* = \overline{B^{\mathrm{T}}}$ であり、行列 $X = B^{\mathrm{T}}$ に対して $\overline{X}$ は X の各成分を共役複素数に置き換えて得られる行列を表わす。(2-2 b) により定義される写像 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{C})$ 上のエルミート内積である。

$n = 1$ のとき、この内積は $\mathrm{M}_{m1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^m$ 上の通常のエルミート内積に一致する。

例 2-2-4 関数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続であるとは、$f(x) = u(x) + iv(x) \quad (u(x), v(x) \in \mathbb{R})$ によって定義される実数値関数 $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ が連続であるときをいう。閉区間 $[a, b]$ 上で定義された複素数値連続関数全体を $C([a, b], \mathbb{C})$ と記す。これは関数の和とスカラー倍に関して複素ベクトル空間をなす。

今、連続関数 $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ に対して積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

によって定義する。さらに、$f, g \in C([a, b], \mathbb{C})$ に対して $\langle f, g\rangle \in \mathbb{C}$ を

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \tag{2-2 c}$$

によって定義する。写像 $\langle\ ,\ \rangle$ は $C([a, b], \mathbb{C})$ 上のエルミート内積である。

● 2-3：長さ (ノルム)

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ をエルミート計量空間とする。任意の $v \in V$ に対して $\langle v, v\rangle \geq 0$ であるからその正の平方根をとることができる。これを v の**長さ**または**ノルム**といい、$\|v\|$ で表わす：

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{2-3 a}$$

複素数 α に対して、$|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$ を α の絶対値と呼ぶ。$\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と書くとき、$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。

例 2-3-1 通常のエルミート内積を持つ $\mathbb{C}^n$ において、$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ のノルムは次で与えられる：

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

例 2-3-2 $C([a, b], \mathbb{C})$ に [例 2-2-4] で与えられているエルミート内積を入れて考える。$f \in C([a, b], \mathbb{C})$ に対して、次が成り立つ：

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$ □

実計量空間と同様に次の補題が成り立つ。

補題 2-3-3

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ をエルミート計量空間とする。ノルム $\|\ \ \|$ は以下の性質を持つ。
任意の $v, u \in V$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して
(1) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
(2) (**コーシー-シュワルツの不等式**) $|\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$.
(3) (**三角不等式**) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

(**証明**)

(1), (3) は実計量空間のときと同様なので、演習問題として残す。(2) を示すには若干工夫が必要である。

$u = 0_V$ ならば不等式は自明に成り立つから、以下、$u \neq 0_V$ ときにコーシー-シュワルツの不等式を示す。実計量空間の場合のコーシー-シュワルツの不等式の証明では、実数値関数 $f(t) = \|tu+v\|^2$ $(t \in \mathbb{R})$ の最小値を考えた。エルミート計量空間の場合も同様の方法で示すことができるが、証明を少し変更する必要がある ($f(t)$ は $t = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$ で最小であったが、これを代入してもうまく行かない)。$\mathbb{C}$ 上の実数値関数 f を

$$f(\alpha) := \|\alpha u + v\|^2 \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

により定義すると、

$$f(\alpha) = \langle \alpha u + v,\ \alpha u + v\rangle = |\alpha|^2\|u\|^2 + \alpha\langle u,v\rangle + \overline{\alpha}\langle v,u\rangle + \|v\|^2$$

となる。$f(\alpha)$ は任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して 0 以上であるから、特に、

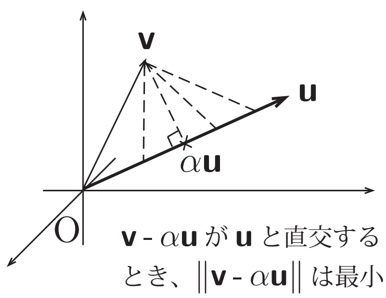
$$\alpha = -\frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\|u\|^2} \tag{2-3 b}$$

に対しても $f(\alpha) \geq 0$ となる。α が (2-3 b) により与えられるとき、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{|\overline{\langle u,v\rangle}|^2}{\|u\|^4}\|u\|^2 - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} - \frac{\langle u,v\rangle\langle v,u\rangle}{\|u\|^2} + \|v\|^2 \\ &= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u,v\rangle|^2}{\|u\|^2} \end{aligned}$$

となるから、$\|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u,v\rangle|^2 \geq 0$ すなわち、$\|u\|\|v\| \geq |\langle u,v\rangle|$ を得る。 □

注意. 幾何学的考察から f は (2-3 b) により与えられる α で最小となることがわかる。次節で導入される正射影という概念を用いると、v と αu との距離 $\|v - \alpha u\|$ が最小になるのは、αu が v から u の張る部分空間への正射影に一致するときである。すなわち、$\langle v - \alpha u, u\rangle = 0$ となるときである。これを解くと、$\alpha = \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2} = \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\|u\|^2}$ が得られる。



● 2-4：ベクトルの直交条件

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ をエルミート計量空間とする。$\langle v,u\rangle$ は一般に複素数なので、

$$\cos\theta = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\|u\|}$$

となる $\theta \in [0,\pi]$ は定まらない。しかし、内積が 0 となる直交条件はエルミート内積でも考えることができる。すなわち、$v, u \in V$ が**直交する**とは、$\langle v,u\rangle = 0$ となるときをいう。特に、零ベクトルは任意のベクトルに直交する。

例 2-4-1 通常のエルミート内積を持つ $\mathbb{C}^2$ において $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3+i \\ 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i \\ -5 \end{pmatrix}$ は直交する。実際、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = (3+i)\overline{2-i} + (1+i)\overline{-5} = (3+i)(2+i) - (1+i)5 = 0$$

となる。 □

No.2 2025年4月14日

線形代数3事前練習用演習問題

pre2-1. 高々 2 次の複素係数の多項式の全体のなす複素ベクトル空間を $\mathbb{C}[x]_2$ とおく。また、$\omega = \dfrac{1+3i}{2} \in \mathbb{C}$ (但し、i は虚数単位) とし、$z_j = \omega^j$ $(j = 0, 1, 2)$ とおく。

(1) $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \in \mathbb{C}[x]_2$ が $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = 0$ を満たすならば、$a_0 = a_1 = a_2 = 0$ である、すなわち、多項式として $f(x) = 0$ であることを示せ。

(2) $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]_2$ に対して

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \sum_{i=0}^{2} f(z_i)\overline{g(z_i)}$$

と定める。関数 $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}[x]_2 \times \mathbb{C}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ はエルミート内積であることを示せ。

pre2-2. $C([-\pi,\pi],\mathbb{C}) = \{\ f \mid f$ は $[-\pi,\pi]$ 上で定義された複素数値連続関数 $\}$ 上に

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \qquad (f, g \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C}))$$

によって定義される内積 $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ を導入する。$f, g \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ を、$\beta \in \mathbb{C}$ として、

$$f(x) = \cos x + i\sin x,\ g(x) = 1 + \beta x \qquad (x \in [-\pi,\pi])$$

によって定義する。

(1) f, g が直交するときの β を求めよ。

(2) g のノルム $\|g\|$ が $\sqrt{6\pi}$ となるときの β を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre2-1. (1) $f(x)$ は高々 2 次なので、多項式として $f(x) \neq 0$ ならば、$f(z) = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は高々 2 個しかない (注：一般に、0 でない高々 n 次の複素係数多項式は $\mathbb{C}$ 内に高々 n 個の根を持つ)。$z_0 = 1,\ z_1 = \omega,\ z_2 = \omega^2$ は相異なるので、$f(x) \neq 0$ であるとすると、矛盾が生じる。したがって、多項式として $f(x) = 0$ である。

(2) $\langle\ ,\ \rangle$ がエルミート双線形性およびエルミート対称性を満たすことは簡単に確かめられる。正定値性の条件のうち、$\langle f, f\rangle \geq 0$ は定義から直ちに従う。後半部分を示す。$\langle f, f\rangle = 0$ とすると、$|f(z_i)|^2 = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ となる。これは、$f(z_i) = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ と同値であり、したがって、(1) より $f(x) = 0$ である。

pre2-2. (1) $\beta = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおく。

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\big((1+ax)\cos x + bx\sin x\big)dx + i\int_{-\pi}^{\pi}\big((1+ax)\sin x - bx\cos x\big)dx \\ &= \cdots\cdots = 2b\pi + i(2a\pi)\end{aligned}$$

であるから、$\langle f, g\rangle = 0$ となるのは $a = b = 0$ のとき、つまり、$\beta = 0$ のときである。

(2) $\|g\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\big((1+ax)^2 + (bx)^2\big)dx = \cdots = 2\pi + \frac{2(a^2+b^2)}{3}\pi^3$ であるから、$\|g\| = \sqrt{6\pi}$ は $a^2 + b^2 = \dfrac{6}{\pi^2}$ と同値である。このような a, b は、$a = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\cos\theta,\ b = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ と表わされる。したがって、$\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ である。

第 2 回 (2025 年 4 月 14 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数３・第２回学習内容チェックシート 2025 年 4 月 14 日

学 籍 番 号 __________________ 氏 名 __________________________

Q1. 複素数 $\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $\beta = c + di$ $(c, d \in \mathbb{R})$ に対して、次の値を求めよ。

(1) $\alpha + \beta =$ ________________________, $\alpha - \beta =$ ______________________________,

$\alpha\beta =$ ___________________________, $\dfrac{\alpha}{\beta} =$ ______________________________

但し、$\dfrac{\alpha}{\beta}$ に対しては $\beta \neq 0$ を仮定する。

(2) $\overline{\alpha} =$ _____________________, $|\alpha| =$ _____________________

Q2. (1) 複素ベクトル空間上のエルミート内積と実ベクトル空間上の内積の違いはどこにあるか、説明せよ。

____

(2) V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし、$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ をエルミート内積とする。

(i) $v \in V$ のノルム $\|v\|$ の定義を書き、ノルムが満たす性質を列挙せよ。

[ノルム $\|v\|$ の定義] [ノルムが満たす性質]

____________________________ ____

(ii) $u, v \in V$ が直交するとはどんなときをいうか？その条件を書け。

____

(iii) $u, v \in V$ のなす角 θ は定義できるか否かを、理由をつけて答えよ。

____

Q3. 複素数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ からベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ をとる。$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ における通常のエルミート内積とするとき、

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$ ______________________________ , $\|\mathbf{x}\| =$ ______________________________

Q4. 第２回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。