§2. 関数の概念

この節では、実数値関数の考え方を例とともに学ぶ。後半では、重要な関数の例として三角関数を取り上げて、その基本的性質を復習する。

● 2-1 : 実数全体からなる集合

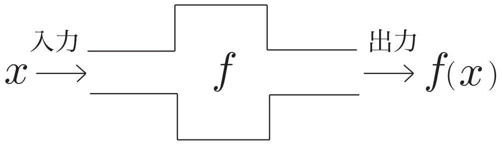
実数全体からなる集合を $\mathbb{R}$ という記号で表わす。「a は実数である」ということを「$a \in \mathbb{R}$」で表わす。例えば、「$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$」は「$\sqrt{2}$ は実数である」ということを表わす。同様に、$\mathbb{R}$ の部分集合 S に対して、a が S の要素であることを $a \in S$ のように書き表わす。

● 2-2 : 関数とは

実数 x に対して x^2 を $f(x)$ とおいてみよう：

$$f(x) = x^2.$$

x が $1, \sqrt{2}, -\pi$ など様々な実数の値をとるとき、$f(x)$ もまた $f(1) = 1,\ f(\sqrt{2}) = 2,\ f(-\pi) = \pi^2$ など様々な実数の値をとる。f は実数 x を入力すると、x^2 という実数を出力する「装置」のようなものと考えられる。



一般に、$\mathbb{R}$ の (空でない) 部分集合 S の要素を 1 つ入力すると、実数を 1 つだけ出力するような「装置」f のことを S 上で定義された (一変数実数値) **関数**といい、S をその**定義域**という。f に S の要素 x を入力したときに出力される実数を $f(x)$ で表わす。S を定義域とする関数 f のことを「関数 $f(x)$ $(x \in S)$」のように表現することが多い。通常、0 以外の実数全体からなる集合を定義域とする関数を「関数 $f(x)$ $(x \neq 0)$」と表わし、0 以上の実数全体からなる集合を定義域とする関数を「関数 $f(x)$ $(x \geq 0)$」と表わす。

例 2-2-1 (1)「関数 $f(x) = \sqrt{x+1}\ \ (x \geq -1)$」は、$-1$ 以上の実数 x を入力したときに、実数 $\sqrt{x+1}$ を出力する関数を表わす。この関数 f の定義域は、-1 以上の実数全体からなる集合 $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \,\}$ である。

(2) どんな実数 x を入力しても、定数 c を出力する関数を c への**定数関数**と呼ぶ。この講義ではこの定数関数を $\underline{c}$ で表わす。例えば、$\underline{2}(x) = 2$ $(x \in \mathbb{R})$ である。

(3)「関数 $f(x) = -x^2 + 3x + 5\ \ (x \in \mathbb{R})$」は、実数 x を入力したときに実数 $-x^2 + 3x + 5$ を出力する関数を表わす。一般に、$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を定数とすると、$\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2-2 a}$$

が考えられる。この関数を**多項式関数**と呼ぶ。

● 2-3 : 関数の和差積商とスカラー倍

定義域が同一の集合 S であるような 2 つの実数値関数 $f(x),\ g(x)$ が与えられたとき、S を定義域とする 4 つの実数値関数 $f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}$ を新たに次のようにして作ることができる (但し、4 番目の関数は、すべての $x \in S$ について $g(x) \neq 0$ のときのみ作ることができる)。

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x)+g(x) \quad (x \in S) \\
(f-g)(x) &:= f(x)-g(x) \quad (x \in S) \\
(fg)(x) &:= f(x)g(x) \quad (x \in S) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in S)
\end{aligned}
$$

この 4 つの関数を、上から順に、f と g の**和**、**差**、**積**、**商**と呼ぶ。また、a を実数とするとき、S を定義域とする実数値関数 af を

$$(af)(x) := af(x) \quad (x \in S)$$

によって定める。af は定数関数 $\underline{a}$ と f との積に他ならない：$af = \underline{a}f$.

例 2-3-1 関数 f_1 を $f_1(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義する。このとき、$f_1^2 = f_1 f_1$ は

$$f_1^2(x) = (f_1 f_1)(x) = f_1(x)f_1(x) = xx = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される関数である。また、関数 $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ $(x \in \mathbb{R})$ は、f_1 を用いて

$$f(x) = -f_1^2(x) + (3f_1)(x) + \underline{5}(x) = (-f_1^2 + 3f_1 + \underline{5})(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

のように表わすことができる。

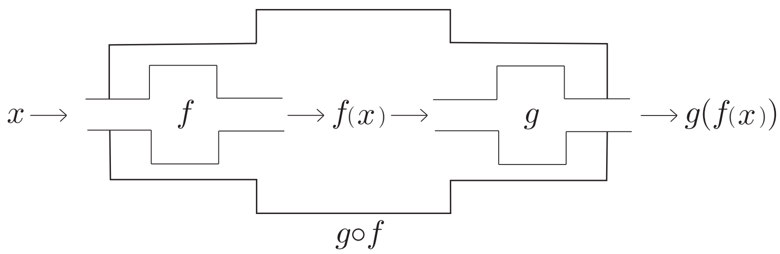
● 2-4：合成関数

S_1 上で定義された関数 $f(x)$ と S_2 上で定義された関数 $g(y)$ が**合成可能である**とは、すべての $x \in S_1$ について $f(x) \in S_2$ が満たされるときをいう。このとき、S_1 を定義域とする関数 $h(x)$ を

(2-4 a) $$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in S_1)$$

によって定めることができる。このように定義される関数 h を f と g の**合成関数**といい、$g \circ f$ で表わす：

(2-4 b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in S_1).$$



例 2-4-1 関数 $h(x) = \sqrt{2x-1}$ $(x \geq \frac{1}{2})$ は、2 つの関数

$$f(x) = 2x - 1 \quad (x \geq \tfrac{1}{2}) \qquad と \qquad g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

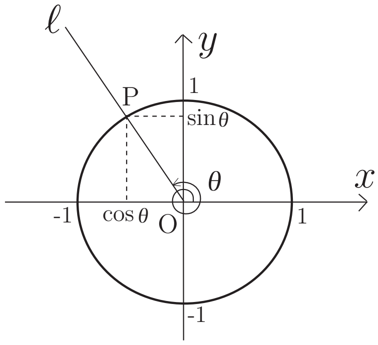
との合成関数 $g \circ f$ に等しい。

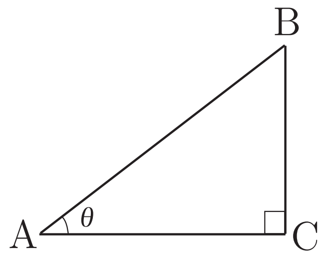
● 2 - 5 : 三角関数

関数の重要な例として三角関数がある。簡単に、その定義と性質を復習する。

(x, y)-座標平面において、原点 O から x-軸の正方向に向かって伸びる半直線を始線と定めて、この始線を O を固定してぐるぐるまわして、一般角 θ だけ回転させる (一般角とは、反時計回りを $+$, 時計回りを $-$ として測った、始線が回転した積算の角度のこと)。このようにして得られる動径 ℓ と単位円周との交点を P とすると、θ に対して P の x 座標を対応させる関数と、P の y 座標を対応させる関数が定まる。$\mathbb{R}$ を定義域とするこれらの関数をそれぞれ**余弦関数**、**正弦関数**といい、cos, sin で表わす。

注意：正弦関数 sin は実数 x を入力したときに $\sin x$ を出力する $\mathbb{R}$ を定義域とする関数を表わしている。高校までは正弦関数を $\sin x$ という形で表わすが、第 2-2 節のように実数を 1 つ入力すると実数を 1 つ出力する関数としての機能を強調したいときには、x を外して sin 単独で表現する。cos についても同様に扱う。





点 P の座標を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると、

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

の関係がある。

一般角 θ は単位円周上を点 $(1, 0)$ から出発して点 P に到達するまでの間に移動した正味の弧の長さ[1]、すなわち、**ラジアン**で表現する。

単位円の周の長さの半分を**円周率**といい、π で表わす。

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

例 2 - 5 - 1 実数 θ に対して

(1) $\cos\theta = 0 \iff \theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数)

(2) $\cos\theta = 1 \iff \theta = 2n\pi$ (n は整数)

(3) $\cos\theta = -1 \iff \theta = (2n+1)\pi$ (n は整数)

[1] 時計回りのときには負の長さとして測った実質的な弧の長さのこと

$\cos\theta \neq 0$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、

(2-5 a) $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

と定め、この式によって定まる $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots \,\}$ 上の関数 tan を**正接関数**という。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、$\cos\theta,\ \sin\theta,\ \tan\theta$ は、全ページの右上の図のような直角三角形 ABC を考えたときに、それぞれ辺の比 $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$, $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$, $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ に等しい：

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}, \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}, \qquad \tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}.$$

余弦関数、正弦関数は以下の性質を持つ。

補題 2-5-2

(1) 余弦関数 cos, 正弦関数 sin は 2π を周期にもつ周期関数である：任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、

(2-5 b) $$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta.$$

(2) 余弦関数 cos は偶関数、正弦関数 sin は奇関数である：任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、

(2-5 c) $$\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

(4) $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

(5) $|\sin\theta| \leq 1,\ |\cos\theta| \leq 1$.

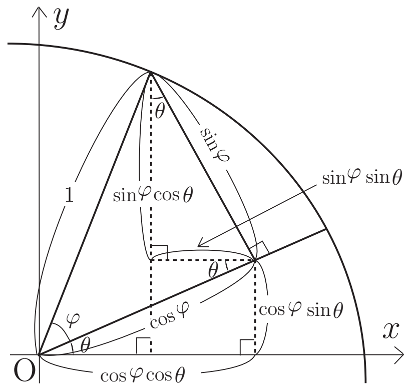
(6) **加法公式**が成り立つ：

(2-5 d) $$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi,$$

(2-5 e) $$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi.$$

(1),(2),(3) は正弦関数、余弦関数の定義から直ちに従う。(5) は (3) による。(4) は (6) と (2) から得られる。

(6) の加法公式 (2-5 e) が成立することは左図からわかる。



加法公式 (2-5 e) において、$\varphi = \theta$ とおき、(3) を用いることにより、次の公式が導かれる：

(2-5 f) $$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

また、(3) の両辺を $\cos^2\theta$ で割って、次の公式が導かれる：

(2-5 g) $$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

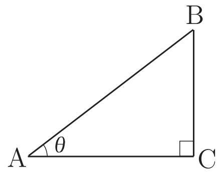
2026 年 4 月 16 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 2 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の $\boxed{\quad}$ に適当な記号や数字を入れなさい。

- 実数全体からなる集合を $\mathbb{R}$ で表わす。これをノートや板書では $\boxed{\quad}$ のように書く。
- π が実数であることを記号で $\boxed{\quad}$ のように表現する。
- 右図の直角三角形 ABC に対して、
  $\sin\theta = \boxed{\quad}$, $\cos\theta = \boxed{\quad}$, $\tan\theta = \boxed{\quad}$ である。



Q2. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
S 上の関数とは？	p.	
関数 $f(x)$ $(x \in S_1)$ と関数 $g(y)$ $(y \in S_2)$ が合成可能であるとは？	p.	
関数 $f(x)$ $(x \in S_1)$ と関数 $g(y)$ $(y \in S_2)$ が合成可能であるとき、合成関数 $g \circ f$ とは？	p.	

Q3. 次の $\boxed{\quad}$ に適当な記号や数字を入れなさい。

- 関数 f を $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義するとき、関数 $6f^2 + 2\sin$ に $\frac{\pi}{2}$ を入力すると $\boxed{\quad}$ が出力され、$\frac{7\pi}{6}$ を入力すると $\boxed{\quad}$ が出力される。
- 関数 g, h を $g(x) = 2x - 1,\ h(x) = 3x^2 + x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義するとき、関数 $h \circ g$ に 1 を入力すると $\boxed{\quad}$ が出力され、$-\frac{1}{2}$ を入力すると $\boxed{\quad}$ が出力される。
- 正接関数 tan とは $S = \boxed{\quad}$ 上の関数 $\tan\theta = \boxed{\quad}$ $(\theta \in S)$ のことをいう。

Q4. 正弦関数と余弦関数が持つ性質を列挙しなさい。

- $\boxed{\quad}$
- $\boxed{\quad}$
- $\boxed{\quad}$
- $\boxed{\quad}$
- $\boxed{\quad}$
- (加法公式) $\boxed{\quad}$

Q5. 第 2 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。