

§2. ネイピア数の無限級数表示

ここでは、(無限) 級数という概念を導入し、級数の収束と発散、級数の和を定義する。後半では、正項級数が収束するための必要十分条件を述べ、ネイピア数の無限級数表示を求める。

● 2-1 : 級数とは

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、その各項を初項から順番に $+$ という記号でつないだ‘形式和’

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**無限級数**、または、単に、**級数**と呼び、

$$(2-1 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書き表わす。ここで、足し算の記号 $+$ や和の記号 $\sum$ を用いているが、足し算を実行した結果を表わしているわけではないことに注意する。

例 2-1-1

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ を**調和級数**という。

(2) 実数 a, r に対して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ を初項 a 、公比 r の(無限) **等比級数**という。

● 2-2 : 級数の収束

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、第 1 項から第 n 項までの和

$$(2-2 \text{ a}) \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

を**第 n 部分和**という。

第 n 部分和を第 n 項とする数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい、**極限值**

$$(2-2 \text{ b}) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**和**と呼ぶ。和 S も級数と同じ記号 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表わす。したがって、収束する級数に対して、記号 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、形式和と実数の2つの意味を持つことになる。どちらの意味で使っているのかは、前後の文脈で判断する。

例 2-2-1 無限等比級数

$$(2-2 \text{ c}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

は $|r| < 1$ のとき収束し、そのときの和は $\frac{a}{1-r}$ である。

(証明)

S_n を与えられた級数の第 n 部分和とする。 $S_n - rS_n$ を計算することにより、 $r \neq 1$ のとき、

$$(2-2 \text{ d}) \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となることがわかる。 $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから、 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

となることがわかる。 □

● 2-3：級数の収束と線形性

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ も収束して、その和について、

$$(2-3 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(ii) 任意の実数 k に対して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n)$ も収束して、その和について、

$$(2-3 \text{ b}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (ka_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

● 2-4： $+\infty$ に発散する級数

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $+\infty$ に発散するとは、その第 n 部分和を第 n 項とする数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ に発散するときをいい、これを

$$(2-4 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

と書き表わす。

例 2-4-1 調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散する。

(証明)

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots$ を1つ固定すると、 $k \leq x$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$$

であるから、不等式

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

を得る。この両辺を k が1のときから n のときまで足し上げると、調和級数の第 n 部分和 S_n について

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

が成り立つ。ここで、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\log(n+1) \rightarrow +\infty$ であるから、 $S_n \rightarrow +\infty$ とわかる。つまり、調和級数は $+\infty$ に発散する。 □

● 2-5：正項級数

すべての n について $a_n \geq 0$ を満たす級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**という。

正項級数の第 n 部分和を第 n 項とする数列は単調増加列であることから、正項級数については、収束するか、 $+\infty$ に発散するか、のどちらか一方のみが成り立つ。

定理 2-5-1

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は、数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界になることである。

例 2-5-2 正項級数

$$(2-5 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

は収束する。

(証明)

$n \geq 2$ に対して

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

となるから、数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。よって、正項級数 (2-5 a) は収束する。□

注意 2-5-3 一般に、実数 $\alpha > 1$ について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ は収束する。その和を $\zeta(\alpha)$ と書き、ゼータ関数値という。実は、 $\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.644934066848226\dots$ である。

● 2-6：ネイピア数の無限級数表示

ネイピア数 e を第1節において

$$(2-6 \text{ a}) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

により定義したが、実は次の定理のように表わすこともできる。

定理 2-6-1

ネイピア数 e は無限級数の和として

$$(2-6 \text{ b}) \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

のように表わされる。

上記の無限級数の第 n 部分和が、[定理 1-7-1] の証明の②においてすでに登場していることに注意しよう。

([定理 2-6-1] の証明)

自然数 n に対して、 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ とおく。

次の①, ②を示せばよい。

① $a_n \leq b_n$ が成り立つ。

② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

①の証明：[定理 1-7-1] の証明における (*) より

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{0}{n}\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = b_n.$$

②の証明：

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列である ([例 1-6-2]) から収束する。その極限を β とおくと、①より $e \leq \beta$ である。

$\beta \leq e$ を示す。そのためには、任意の自然数 n に対して $b_n \leq e$ となることを示せばよい。 $m > n$ を満たすすべての自然数 m に対して

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \left(1 - \frac{k-2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{0}{m}\right) \\ < 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \left(1 - \frac{k-2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{0}{m}\right) = a_m \end{aligned}$$

となる。この両辺の極限 $\lim_{m \rightarrow \infty}$ をとれば、 $b_n \leq e$ が得られる。

これで、 $e = \beta$ が示された。

□

● 2-7：べき級数

x を変数とするべき級数とは、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を定数として、次の形に書かれる級数 (形式和) のことをいう：

$$(2-7 \text{ a}) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

これは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くこともできる。

べき級数の変数 x に具体的な数 $x = x_0$ を代入すると ($n = 0$ から始まる) 級数が得られる。

べき級数 (2-7 a) における x に具体的な数 x_0 を代入することにより得られる級数

$$(2-7 \text{ b}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

は、 x_0 の値によって収束したりしなかったりするが、少なくとも $x = 0$ においてべき級数 (2-7 a) は収束する。実際、べき級数 (2-7 a) に $x = 0$ を代入すると、級数

$$a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

が得られるが、これは a_0 に収束している。

例 2-7-1 任意の実数 x に対して $e^x, \sin x, \cos x$ は次のべき級数により表わされる。

$$(2-7 \text{ c}) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$(2-7 \text{ d}) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

$$(2-7 \text{ e}) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots$$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 2 回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
級数とは？	p.	
級数の第 n 部分和とは？	p.	
級数の和とは？	p.	
正項級数とは？	p.	
べき級数とは？	p.	

Q2. 次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
初項 a , 公比 r ($\neq 1$) の等比級数の第 n 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1}$ を求めるには？	
正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示すには？	

Q3. 次の に適当な言葉や数字を入れなさい。

- 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ および任意の実数 k に対して級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ は収束し、その和は次の公式を使って求めることができる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \text{}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n = \text{}.$$

- 調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は するが、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は する。

- ネイピア数 e は無限級数の和として $e = \text{}$ のように表わされる。

Q4. 第 2 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。