

§2. 級数の収束判定法

一般に、級数の和を求めることは難しい問題であり、統一的な理論はない。しかし、ある種の級数については、和が存在するかどうか、すなわち、収束するかどうかを調べることができる。この節では、級数の収束判定法のうち、比較判定法とダ・ランベールの判定法を学ぶ。

● 2-1：比較判定法

次の定理に書かれている、級数の収束判定法を**比較判定法**という。

定理 2-1-1

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ について、

$$(2-1 a) \quad a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとき、

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $+\infty$ に発散するならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も $+\infty$ に発散する。

(証明)

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の第 n 部分和をそれぞれ S_n, T_n とおくと、(2-1 a) より次が成り立つ：

$$(2-1 b) \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = T_n.$$

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の和を T とおくと、この級数は正項級数なので、 $T_n \leq T$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つ。これと (2-1 b) により、

$$S_n \leq T \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を得る。したがって、数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。[定理 1-5-1] により、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することがわかる。

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $+\infty$ に発散するならば、数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $+\infty$ に発散する。(2-1 b) より、数列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ も $+\infty$ に発散する。よって、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も $+\infty$ に発散する。 $\square$

例 2-1-2 次の各級数について、収束するかどうかを判定せよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1}$$

解；

(1) すべての n について、

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

である。また、[例 1-5-2] により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束することがわかっているから、比較判

定法を適用して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ もまた収束することがわかる。

(2) すべての n について、次の不等式が成り立つ：

$$\frac{n}{n^2 + 3n + 1} > \frac{n}{n^2 + 3n + 2n^2} = \frac{1}{3(n+1)}.$$

ここで、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ は、調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が $+\infty$ に発散する [例 1-4-1] ことから、 $+\infty$ に発散する。比較判定法により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1}$ も $+\infty$ に発散する。□

● 2-2 : ダ・ランベール (d'Alembert) の判定法

次の定理に書かれている、級数の収束判定法をダ・ランベールの判定法という。

定理 2-2-1

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について、

$$(2-2 \text{ a}) \quad a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(2-2 \text{ b}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \text{ が存在する}$$

が成り立っているとする。このとき、

(1) $\ell < 1$ のとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\ell > 1$ のとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $+\infty$ に発散する。

(証明)

(1) $r = \frac{1+\ell}{2}$ とおくと、 $\ell < 1$ より、 $\ell < r < 1$ となる。(2-2 b) により、 n が十分大きいときには、 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ は ℓ の「ごく近く」にないといけないから、

ある番号 N 以上のすべての n については、常に、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ が満たされる。

すると、 $n \geq N$ のとき、

$$(\#) \quad a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N \leq r \cdot r \cdots r \cdot a_N = r^{n-N} a_N$$

となる。そこで、数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$b_n = \begin{cases} a_n & (n = 1, 2, \dots, N), \\ a_N r^{n-N} & (n = N+1, N+2, \dots) \end{cases}$$

によって定義する。 $n \geq N$ なるすべての自然数 n に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= b_1 + \cdots + b_{N-1} + b_N + b_{N+1} + \cdots + b_n \\ &= a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N + a_N r + \cdots + a_N r^{n-N} \\ &= a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N (1 + r + \cdots + r^{n-N}) \\ &= a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N \frac{1 - r^{n-N+1}}{1 - r} \quad (\because r \neq 1) \\ &\leq a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N \frac{1}{1 - r} \quad (\because 0 \leq r < 1) \end{aligned}$$

となるので、数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n b_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。よって、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。さらに、(♯)により、

$$a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であるから、比較判定法により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することがわかる。

(2) (1)と同様にして証明することができる。

$r = \frac{1+\ell}{2}$ とおくと、 $\ell > 1$ より、 $1 < r < \ell$ となる。今度の場合には

ある番号 N 以上のすべての n について、常に、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$ が満たされる。

すると、 $n \geq N$ のとき、

$$(b) \quad a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N \geq r \cdot r \cdots r \cdot a_N = r^{n-N} a_N$$

となる。そこで、(1)と同じように数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めると、 $n \geq N$ のとき、

$$\sum_{k=1}^n b_k = a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N \frac{1 - r^{n-N+1}}{1 - r} \rightarrow +\infty$$

となるので、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は発散する。さらに、(b)により、 $b_n \leq a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるから、比較判定法により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散することがわかる。 $\square$

例 2-2-2 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$ は収束する。

解；

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、 $a_n > 0$ であり、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 0 < 1$ ($n \rightarrow \infty$) であるから、ダ・ランベールの判定法により、与えられた級数は収束する。 $\square$

● 2-3：絶対収束

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとは、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するときをいう。

定理 2-3-1

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、その級数自体も収束する。

(証明)

各自然数 n に対して、

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

とおくと、

$$(*) \quad 0 \leq a_n^{\pm} \leq |a_n|$$

が成り立つ。仮定により、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は収束するから、比較判定法により、正項級数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ は収束し、したがって、差 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。 $\square$

例 2-3-2 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対収束する。したがって、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 自身も収束する。

(証明)

• $x = 0$ のとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 1 + 0 + 0 + \dots$ であるから、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ は 1 に収束する。
 • $x \neq 0$ のとき、 $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) とおくと、 $a_n > 0$ であり、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1}$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

となる。ダランベールの判定法により級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ は収束する、つまり、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対収束する。 $\square$

● 2-4：級数の収束条件

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ のように、符号が交互に変わる級数は**交項級数**と呼ばれる。

定理 2-4-1

数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少列で、 $b_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ を満たしているとする。このとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ は収束する。

(証明)

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$ とおくと $(-1)^n = S_n - S_{n-1}$ であるから、

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k b_k = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$

となる。但し、 $S_0 = 0$ とする。 $|S_n| \leq 1$ より

$$\sum_{k=1}^{n-1} |S_k (b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_n \leq b_1$$

であるから、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n (b_n - b_{n+1})$ は絶対収束するので収束する。また、 $|S_n| \leq 1$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n b_n = 0$ である。故に、 $\left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。 $\square$

例 2-4-2 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ は収束する。

注意：調和級数は収束しないので上の級数は絶対収束しない。

一般の級数に対する収束判定法は存在しないが、次の定理は役に立つ。

定理 2-4-3

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でなければならない。

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 2 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
比較判定法とは？	p.	
ダ・ランベールの判定法とは？	p.	
級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとは？	p.	

Q2. 次の に適当な言葉や数式を入れなさい。

- 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するかどうかを調べるための方法には、前回学んだ直接的な方法の他に、 と という 2 つの収束判定法を使う方法がある。
- 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は するので、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) となっていれば、 判定法により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は することがわかる。
- 調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は するので、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について $\frac{1}{n} \leq a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) となっていれば、 判定法により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は することがわかる。
- 「 収束する級数は収束する」ので、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、正項級数 が収束することがわかると、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 自身も収束することがわかる。
- 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ でなければならない。

Q3. 第 2 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。