§3. 数学的帰納法

定理を証明したり、数や関数を定義したりする際にしばしば使われる帰納法の原理は、自然数全体からなる集合 $\mathbb{N}$ が持つ基本的な性質の 1 つである。この節の目標は数学的帰納法の意味を学び、それを用いた証明が書けるようになることである。

● 3-1：自然数の集合 $\mathbb{N}$ の特徴づけ

自然数の全体 $\mathbb{N}$ は、(i) $1 \in \mathbb{N}$ および (ii) $a \in \mathbb{N}$ ならば $a+1 \in \mathbb{N}$ を満たす $\mathbb{R}$ の部分集合である。これと同じ性質

$$\text{(i) } 1 \in A, \qquad \text{(ii) } a \in A \text{ ならば } a+1 \in A$$

を持つ、$\mathbb{R}$ の部分集合 A は沢山あるが、$\mathbb{N}$ はそのような A の中で最小 (すなわち、上の 2 条件を満たす任意の部分集合は常に $\mathbb{N}$ を含む) 部分集合として特徴づけることができる。この事実から $\mathbb{N}$ の重要な性質—整列性—が導かれる：

自然数の整列性

$\mathbb{N}$ の空でない任意の部分集合には最小元が存在する。

このプリントでは自然数の整列性を出発点にして帰納法の原理を導く。

● 3-2：数学的帰納法

文字 n を用いた数学的主張 $P(n)$ において、$P(1), P(2), P(3), \ldots$ がすべて命題になるとき、$P(n)$ を $\mathbb{N}$ を定義域とする**命題関数**という。

例 3-2-1 数学的主張「n が奇数であるならば n^2 は奇数である。」を $P(n)$ とおくと、$P(1), P(2), P(3), \ldots$ はいずれも真偽が定まる (と考えられる) ので命題である。よって、$P(n)$：「n が奇数であるならば n^2 は奇数である。」は $\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数である。

$\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数 $P(n)$ が与えられたとき、命題 $P(1), P(2), P(3), \ldots$ の真偽を判定したい。しかるに、これらは無限個の命題なので、真偽を 1 つ 1 つ調べていくことで判定することはできない。そこで役に立つのが**数学的帰納法** (mathematical induction) である。帰納法は、わずか 2 ステップで $P(1), P(2), P(3), \ldots$ のすべてが真であることを証明できることを主張する有用な証明法である。

定理 3-2-2 (帰納法の原理)

$\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数 $P(n)$ が与えられているとする。もし、次の I, II が示されたとすると、全称命題「$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n)$」は真である、すなわち、命題 $P(1), P(2), P(3), \ldots\ldots$ はすべて成り立つ。

I. $P(1)$ は成り立つ。

II. $k \in \mathbb{N}$ について、$P(k)$ が成り立つと仮定すると、$P(k+1)$ も成り立つ。

(**証明**)

背理法で証明する。

$M := \{\, n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ は成り立たない} \,\}$ とおき、$M \neq \varnothing$ であると仮定する。このとき、自然数の整列性から、M の中に最小の自然数 m が存在する。I により、$m > 1$ である。すると、$m-1 \in \mathbb{N}$ であるが、m の最小性から、$m-1 \notin M$ である。よって、$P(m-1)$ が成り立ち、したがって II により、$P(m) = P((m-1)+1)$ が成り立つ。これは $m \notin M$ を意味しており、

$m \in M$ に矛盾する。よって、$M = \varnothing$ でなければならない。つまり、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ。 □

注意 3-2-3

(1) 定理の I, II をそれぞれ帰納法の第 1 段、第 2 段と呼ぶ。II における「$k \in \mathbb{N}$ について、$P(k)$ が成り立つと仮定する」の部分を**帰納法の仮定** (induction hypothesis) と呼ぶ。

(2) 定理の証明は分かりにくかったかもしれないが、それが成り立つ理由はとても単純である。まず、I により $P(1)$ が成り立ち、次に、II において $k = 1$ の場合を考えると ($P(1)$ が成り立っているので) $P(2)$ が成り立つことがわかり、さらに II において $k = 2$ の場合を考えると ($P(2)$ が成り立っているので) $P(3)$ が成り立つことがわかり …… というように、次々と「成り立つ」ことが連鎖していくわけである。

(3) ある整数 a に対して $\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a \,\}$ を定義域とする命題関数 $P(n)$ が与えられているときには、I を「$P(a)$ が成り立つ」に、II の中の「$k \in \mathbb{N}$」を「$k \geq a$ なる $k \in \mathbb{Z}$」と置き換えることより、$n \geq a$ を満たすすべての整数 n について $P(n)$ が成り立つことがいえる。

数学的帰納法で証明する際には、最初に、命題関数 $P(n)$ が何かをはっきり書くことが大切である。

例 3-2-4 すべての $n \in \mathbb{N}$ について、次の等式が成り立つ：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(**証明**)

証明すべき等式を $P(n)$ とおく：

$$P(n): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が真であることを、n についての数学的帰納法により証明する。

I. ($P(1)$ の左辺) $= 1$, ($P(1)$ の右辺) $= \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ より、$P(1)$ は成り立つ。

II. $k \in \mathbb{N}$ とし、$P(k)$ が成り立っていると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}
(P(k+1) \text{ の左辺}) &= (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad (\text{帰納法の仮定を適用}) \\
&= \frac{k+1}{6}(k(2k+1) + 6(k+1)) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= (P(k+1) \text{ の右辺})
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、$P(k+1)$ も成り立つ。

I と II から、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が成り立つ。

□

● 3 - 3 : 帰納法の変形版

$\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数 $P(n)$ について、全称命題「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ は真である」ことを示すための方法として、[定理 3 - 2 - 2] において数学的帰納法があることを説明した。命題関数 $P(n)$ の定義域は必ずしも $\mathbb{N}$ でなくても、例えば、2 以上の自然数全体、一般に、ある $n_0 \in \mathbb{Z}$ 以上の整数全体 $\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0 \}$ であっても、帰納法の原理を適用することができる。その場合、帰納法の第 1 段と第 2 段を次のように置き換えればよい。

定理 3 - 3 - 1 (帰納法の原理)

$n_0 \in \mathbb{Z}$ とし、$N := \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0 \}$ を定義域とする命題関数 $P(n)$ が与えられているとする。もし、次の I, II が示されたとすると、全称命題「$\forall n \in N,\ P(n)$」は真である、すなわち、命題 $P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \ldots\ldots$ はすべて成り立つ。

I. $P(n_0)$ は成り立つ。

II. $k \geq n_0,\ k \in \mathbb{Z}$ について、$P(k)$ が成り立つと仮定すると、$P(k+1)$ も成り立つ。

例 3 - 3 - 2 $n \geq 4$ を満たすすべての自然数 n について、次の不等式が成り立つ：

$$2^n < n!.$$

(証明)

$P(n)$ を

$$P(n): \quad 2^n < n!$$

とおく。$n \geq 4$ を満たすすべての自然数 n に対して $P(n)$ が真であることを、n についての数学的帰納法により証明する。

I. $P(4)$ は

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

より成立する。

II. $k \geq 4,\ k \in \mathbb{N}$ とし、$P(k)$ が成り立っていると仮定する。このとき、

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 < k! \cdot 2 < k! \cdot (k+1) = (k+1)!$$

となる。よって、$P(k+1)$ も成り立つ。

I と II から、$n \geq 4$ を満たすすべての自然数 n に対して $2^n < n!$ が成り立つ。 □

$\mathbb{Z}$ を定義域とする命題関数 $P(n)$ について全称命題「すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $P(n)$」が真であることを示したいとき、まず、$n \geq 0$ の範囲で数学的帰納法を適用して真であることを示し、$n < 0$ を満たす $n \in \mathbb{Z}$ に対しては $P(-n)$ が真であることを利用して $P(n)$ が真であることを示す、という手順で証明できる場合がある。

例 3 - 3 - 3 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して複素数 $e^{i\theta}$ を

(3 - 3 a) $$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

によって定める。このとき、すべての $n \in \mathbb{Z}$ とすべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

(証明)

$P(n)$ を

$$P(n):\ すべての\ \theta \in \mathbb{R}\ に対して\ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

とおく。まず、

(1) すべての整数 $n \geq 0$ に対して $P(n)$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

I. $P(0)$ が真であることを示す。任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(e^{i\theta})^0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 = e^{i\,0}$$

が成り立つので、$P(0)$ は成り立つ。

II. $n \geq 0$ とし、$P(n)$ は真であると仮定する。このとき、任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
(e^{i\theta})^{n+1} &= (e^{i\theta})^n \cdot e^{i\theta} \\
&= e^{in\theta} \cdot e^{i\theta} \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&= (\cos n\theta + i \sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta) + i(\cos n\theta \sin\theta + \sin n\theta \cos\theta) \\
&= \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta \quad (\text{加法公式}) \\
&= e^{i(n+1)\theta}
\end{aligned}$$

となる。したがって、$P(n+1)$ も真である。

I と II から、$n \geq 0$ を満たすすべての整数 n に対して $P(n)$ が成り立つ。

(2) $n < 0$ を満たすすべての整数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを証明する。

$n < 0$ を満たす整数 n に対して $m := -n$ とおくと、$m > 0$ であるから (1) より、

$$\begin{aligned}
(e^{i\theta})^n &= (e^{i\theta})^{-m} \\
&= \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^m \\
&= \big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big)^m \\
&= e^{i(-m\theta)} \quad ((1)\ \text{の結果}) \\
&= e^{in\theta}
\end{aligned}$$

となる。したがって、$P(n)$ も真である。

(1), (2) より、すべての $n \in \mathbb{Z}$ とすべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ となることが証明された。 □