§3. 行列の演算

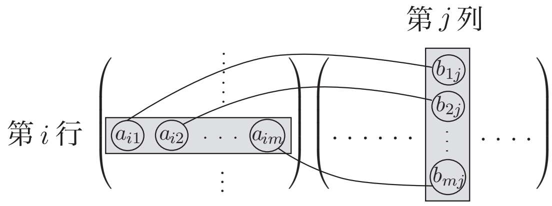
行列の演算には、積の他に和と差とスカラー倍がある。この節の前半では、これらの定義と性質、ブロック計算法を学ぶ。後半では、経済学における 1 つのモデル—レスリーモデル—を例にとりながら、正方行列の k 乗を求めることの意義を説明する。

● 3 - 1 : 行列の積 (復習)

行列 A の列の数と行列 B の行の数が一致していれば、次のように、積 AB が定義されるのであった：(l,m)-行列 $A=(a_{ik})_{i,k}$ と (m,n)-行列 $B=(b_{kj})_{k,j}$ に対して

(3 - 1 a)
$$AB=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le j\le n}},$$
$$\text{但し、}\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}.$$

行列 AB の (i,j)-成分 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$ は、下図のように、A の第 i 行に並ぶ数字と B の第 j 列に並ぶ数字を、順番に「掛けて足す」ことを繰り返して得られる。



例 3 - 1 - 1 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ に対して、$AB=\begin{pmatrix}-7&0&7\\-16&-6&22\end{pmatrix}$ である。一方、(B の列の数) $=3\neq 2=$ (A の行の数) なので、積 BA は定義されない。 □

● 3 - 2 : 行列の和、差とスカラー倍

行列の演算には、積の他に和と差とスカラー倍がある。同じサイズの行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ に対して、和 $A+B$ と差 $A-B$ が次のように定義される。

- 行列の和の定義： $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ 　(成分ごとに和を取る)
- 行列の差の定義： $A-B=(a_{ij}-b_{ij})$ 　(成分ごとに差を取る)

また、行列 $A=(a_{ij})$ と実数 t に対して、スカラー倍 tA が次のように定義される。

- 行列のスカラー倍の定義： $tA=(ta_{ij})$ 　(各成分を t 倍する)

例 3 - 2 - 1 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\\sqrt{2}&\pi&3\end{pmatrix}$ に対して、

$$A+B=\begin{pmatrix}1&3&5\\1+\sqrt{2}&2+\pi&6\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1-\sqrt{2}&2-\pi&0\end{pmatrix}$$

行列の差 $A-B$ はまた、行列の和とスカラー倍を使って、

(3 - 2 a)
$$A-B=A+(-1)B$$

と表現される。また、行列 A に対して、$(-1)A$ を $-A$ と略記する。

例 3 - 2 - 2 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ に対して、$-A=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$.

● 3 - 3 : 行列の和の性質

行列の和に関しては、実数の和と同じ計算規則が成立する。

定理 3 - 3 - 1

(1) (**結合法則**) 同じサイズの行列 A, B, C に対して、$(A+B)+C = A+(B+C)$.

(2) (**交換法則**) 同じサイズの行列 A, B に対して、$A+B = B+A$.

(3) (**零行列の性質**) 行列 A と同じサイズの零行列 O について、$A+\mathrm{O} = A = \mathrm{O}+A$.

● 3 - 4 : 行列の積と和、行列の和とスカラー倍、行列の積とスカラー倍の間の性質

定理 3 - 4 - 1

行列 $A,\ B,\ C$ と実数 s, t に対して、

(1) (**分配法則**) 積 AB と積 AC が定義可能で、和 $B+C$ も定義可能なとき、

(3 - 4 a) $$A(B+C) = AB + AC.$$

積 AC と積 BC が定義可能で、和 $A+B$ も定義可能なとき、

(3 - 4 b) $$(A+B)C = AC + BC.$$

(2) (**分配法則**) 和 $B+C$ が定義可能なとき、$t(B+C) = tB + tC,\ (s+t)C = sC + tC$.

(3) 積 AB が定義可能なとき、$(tA)B = t(AB) = A(tB)$.

<u>**例 3 - 4 - 2**</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して、$A^2 + AB + BA + B^2$ は

$$A^2 + AB + BA + B^2 = (A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -24 & -12 \\ 8 & -20 \end{pmatrix}$$

のように計算できる。蛇足だが、$AB \neq BA$ なので、$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ である。

● 3 - 5 : 行列のブロック計算

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ に対して、

$$A_{11} = (a_{11}) \qquad A_{12} = (a_{12}\ a_{13}) \qquad B_{11} = (b_{11}) \qquad B_{12} = (b_{12}\ b_{13})$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B_{21} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \qquad B_{22} = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

が成立する。

今は A_{11}, B_{11} を 1 次正方行列となるようにとったが、

$$A_{11} = (a_{11}\ a_{12}) \qquad A_{12} = (a_{13}) \qquad B_{11} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \qquad B_{12} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \qquad B_{21} = (b_{31}) \qquad B_{22} = (b_{32}\ b_{33})$$

とおいても、

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

が成立する。

より一般に、積が定義可能な行列 $A,\ B$ に対して、

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{A_{11}}}^{r} & \overbrace{\hphantom{A_{12}}}^{n-r} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{A_{11}}\right\} s \\ \left.\vphantom{A_{21}}\right\} m-s \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{B_{11}}}^{t} & \overbrace{\hphantom{B_{12}}}^{l-t} \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{B_{11}}\right\} r \\ \left.\vphantom{B_{21}}\right\} n-r \end{array}$$

のようにそれぞれを小行列に分ける (ブロック分けする) とき、

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

が成立する。特に、$A_{12},\ A_{21},\ B_{12},\ B_{21}$ がすべて零行列ならば、

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

このように、ブロック計算は、0 がひと固まりになっている部分を持つ行列同士の積の計算に有効である。

例 3 - 5 - 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に、次のように分割線を入れて、小ブロックに分ける。$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$. これを利用して積 AB を計算する。

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ A_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ B_{11} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},\ B_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$AB = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & \mathrm{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 13 \\ -30 & -30 & 0 & 0 \\ -42 & -40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

● 3 - 6 : 行列の冪乗

n 次正方行列 A と自然数 $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、A を k 個掛け合わせて得られる行列を A の k **乗**と呼び、 A^k で表わす：$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k\ 個}$.

例 3 - 6 - 1 対角成分以外はすべて 0 であるような正方行列、すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & a_n \end{pmatrix}$$

の形をした正方行列を**対角行列**と呼ぶ。対角行列の k 乗は次のように簡単に求まる：

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & a_n^k \end{pmatrix}.$$

● 3-7：固有値問題 (レスリーモデル)

連立一次方程式の理論と解法は、固有値の理論に応用してこそ、その真の威力を発揮する。この講義の最後の 2 回では、固有値の理論と解法を学ぶが、その有用性を認識するために、ここで人口動態のシュミレーションに使われるレスリーモデルの例を紹介しよう。

ここでは、寿命がおよそ 40 年であるようなある生物 A について、10 年後、20 年後、$\cdots$ の生存状況がどのように変化するのかを考察する。まず、10 年ごとに年代を区切って、生後 10 年までの第 1 段階から生後 41 年以降の第 5 段階までの 5 つの段階に分ける。第 i 段階 $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ の生物 A が 10 年以上生き延びる確率を p_i とする。但し、ここでは、$p_5 = 0$ と約束しておく。そして、第 i 段階 $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ に属する 1 個体が 10 年間に平均 f_i 匹産むとする。

ここで、次のような問題を考えよう。現在、生物 A の生存個体数が、第 1 段階から第 5 段階に順に $50, 40, 25, 15, 5$ 匹であるとしたとき、10 年後、20 年後、より一般に、$(10 \times n)$ 年後の、第 i 段階に生存している個体数 $x_i^{(n)}$ はどのようになっているか？

	第 1 段階	第 2 段階	第 3 段階	第 4 段階	第 5 段階
年齢	0〜10	11〜20	21〜30	31〜40	41〜50
現在の個体数	50	40	25	15	5
$(10 \times n)$ 年後の個体数	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$x_4^{(n)}$	$x_5^{(n)}$

行列 L とベクトル $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(n)}$ を次で定める：

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ x_4^{(n)} \\ x_5^{(n)} \end{pmatrix}.$$

ベクトル $\mathbf{x}^{(n)}$ は $(10 \times n)$ 年後の各段階における生存状況を表わしており、$\mathbf{x}^{(1)} = L\mathbf{x}^{(0)}$ である。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(n-1)} f_1 + x_2^{(n-1)} f_2 + x_3^{(n-1)} f_3 + x_4^{(n-1)} f_4 + x_5^{(n-1)} f_5 \\ x_1^{(n-1)} p_1 \\ x_2^{(n-1)} p_2 \\ x_3^{(n-1)} p_3 \\ x_4^{(n-1)} p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(n-1)} \end{aligned}$$

であるから、$\mathbf{x}^{(n)}$ は

$$\mathbf{x}^{(n)} = L\mathbf{x}^{(n-1)} = L^2\mathbf{x}^{(n-2)} = \cdots = L^n\mathbf{x}^{(0)}$$

のように求めることができる。よって、$\mathbf{x}^{(n)}$ を知るには L^n が計算できればよい。

L^n を計算するにはどうしたらよいか？この講義の最後の 2 回分で、そのための理論的な根拠 (固有値、固有ベクトル、対角化など) を与え、実際に計算できる技術を身につける。

No.3　　　　2026 年 4 月 23 日

線形代数１事前練習用演習問題

pre3-1. (ブロック計算)

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

を適当に 4 つの小行列に分割することにより、A^2 を計算せよ (分割の仕方も書くこと)。

(2) 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して B^2 を計算せよ。

pre3-2. (A の冪乗)

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について、

(1) A^2, A^3 を計算せよ。

(2) A の k 乗を予測し、それを求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre3-1. 第 3 - 5 節、[例 3 - 5 - 1] を参考に、小ブロックに分ける。

(1) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$ のように、小ブロックに分ける。

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & O \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{22}^2 \end{pmatrix}$$

となる。2 次正方行列 $A_{11}^2, A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21}, A_{22}^2$ をそれぞれ計算して

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & -10 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $B = \begin{pmatrix} E_2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A \end{pmatrix}$ と小ブロックに分けることができる。このとき、

$$B^2 = \begin{pmatrix} E_2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

pre3-2. 2 次正方行列の積の定義に基づいて計算し、予測する。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 - a + 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $A^k = \begin{pmatrix} a^k & a^{k-1} - a^{k-2} + \cdots + (-1)^k a + (-1)^{k+1} \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$ と予測される。数学的帰納法で、この予測が正しいことが示される。帰納法の第 2 段においては、$A^{k+1} = A^k A$ と書けることを用いて示すことができる。

線形代数１・第 3 回 (2026 年 4 月 23 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第３回学習内容チェックシート 2026 年 4 月 23 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
正方行列 A の k 乗とは？	p.	
対角行列とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{\quad}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ および、実数 t に対して、

$$A + B = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}, \qquad tA = \boxed{\qquad\qquad\qquad}.$$

- (l, m)-行列 A と (m, n)-行列 B をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

のように 4 つの小行列に分割する。もし、A_{11}, A_{21} の列数と B_{11}, B_{12} の $\boxed{\quad}$ が一致し、A_{12}, A_{22} の列数と B_{21}, B_{22} の $\boxed{\quad}$ が一致していれば、上記の分割を利用して積 AB を計算することができ、その結果は $A_{11}, \cdots, A_{22}, B_{11}, \cdots, B_{22}$ を用いて

$$AB = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

により与えられる。

- ブロック計算は、$\boxed{\quad}$ がひと固まりになっている部分を持つ行列同士に対して有効である。例えば、次の形をした行列 A, B の場合、次のように小行列に分割すれば、少ない計算量で積 AB を見通しよく計算することができる (その分割方法を、行列に分割線を入れることにより表現しなさい)。

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}, \qquad B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ に対して、$A^k = \boxed{\qquad\qquad}$ である。

Q3. 第 3 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。