§3. 内積と行列

ここでは、内積に深い関わりを持つ行列–直交行列と対称行列—を取り上げ、その性質を調べる。最後に、対称行列の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを示す。

● 3 - 1 : 転置行列と内積

(m,n)-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して、その行と列を入れ換えて得られる (n,m)-行列

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を A の**転置行列**という。転置行列は次の性質を持つ。

補題 3 - 1 - 1

行列 $A,\ B$ について、

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

(2) 積 AB を考えることが可能なとき、$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

(3) A, B が同じサイズのとき、$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

(4) 任意の実数 t に対して $(tA)^{\mathrm{T}} = tA^{\mathrm{T}}$.

上の補題の証明は演習問題とする。なお、補題の (2) は下の定理を使って証明することもできる (その方が易しい)。

内積と転置行列の間には次の関係が成り立つ。

定理 3 - 1 - 2

A を (m,n)-行列とする。このとき、任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\langle A\mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x},\ A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \rangle.$$

(**証明**)

$$A = (a_{ij}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$ とおくと、$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix},\ A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}y_i \end{pmatrix}$$ と

なる。これを用いて内積 $\langle A\mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle$ と $\langle \mathbf{x},\ A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \rangle$ をそれぞれ計算すると、どちらも $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_ix_j$ であることがわかる。 □

● 3 - 2 : 直交行列

n 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ の列ベクトル

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

が互いに直交していて、かつ、各ベクトルの長さが 1 のとき、すなわち “$\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \cdots,\ \mathbf{p}_n$” が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底のとき、P は**直交行列**であると呼ばれる。[定理 1 - 4 - 3] により、直交行列は正則である。

例 3 - 2 - 1 (1) n 次単位行列 $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & 1 \end{pmatrix}$ は直交行列である。また、E_n の列ベクトルを適当に入れ換えて得られる行列も直交行列である。例えば、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は 3 次直交行列である。

(2) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は直交行列である。

直交行列は行列の転置を使って特徴づけることができる。

補題 3 - 2 - 2
n 次実正方行列 P が直交行列であるための必要十分条件は $P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となることである。したがって、直交行列の逆行列は転置行列によって与えられる。

(証明)

P の列ベクトルを $\mathbf{p}_1,\ \cdots,\ \mathbf{p}_n$ とおくと、

$$P^{\mathrm{T}}P = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n \rangle \\ \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_n \rangle \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、

$$P \text{ が直交行列} \iff \langle \mathbf{p}_i,\ \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{ij} \iff P^{\mathrm{T}}P = E_n$$

となる。後半の主張は逆行列の定義から明らかである。 □

例 3 - 2 - 3 3 次実正方行列

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は $P^{\mathrm{T}}P = E_3$ を満たしている。したがって、P は直交行列である。よって、P は正則であって、P の逆行列は

$$P^{-1} = P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって与えられる。 □

直交行列は内積を保つ行列としても特徴づけることができる。

補題 3 - 2 - 4

n 次正方行列 P が直交行列であるための必要十分条件は、すべての $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

(3 - 2 a) $$\langle P\mathbf{x},\ P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle$$

が成り立つことである。

(**証明**)

- 必要性：P を直交行列とすると、[補題 3 - 2 - 2] より、$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる。したがって、

$$\langle P\mathbf{x},\ P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \ P^{\mathrm{T}}P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle.$$

- 十分性：すべての $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\langle P\mathbf{x},\ P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle$ が成り立っていると仮定する。$\langle P\mathbf{x},\ P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \ P^{\mathrm{T}}P\mathbf{y}\rangle$ と書き換えられるから

$$\langle \mathbf{x},\ \ (P^{\mathrm{T}}P - E_n)\mathbf{y}\rangle = 0$$

を得る。上式はすべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つから、各 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$(P^{\mathrm{T}}P - E_n)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を得る ([補題 2 - 5 - 4] 参照)。したがって、$P^{\mathrm{T}}P - E_n = \mathrm{O}$ となり、P は直交行列である。 □

[補題 3 - 2 - 2] と [補題 3 - 2 - 4] から次の定理を得る。

定理 3 - 2 - 5

$P = (\mathbf{p}_1\ \cdots\ \mathbf{p}_n)$ を n 次正方行列とする。次の 4 つは同値である。

① P は直交行列である。
② P の列ベクトルの全体 “$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$” は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。
③ $P^{\mathrm{T}}P = E_n$.
④ すべての $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle P\mathbf{x},\ P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle$.

● 3 - 3 : 対称行列

n 次正方行列 A が $A^{\mathrm{T}} = A$ を満たすとき、**対称行列**と呼ばれる。

例 3 - 3 - 1 (1) **対角行列** (= 対角成分以外はすべて 0 の正方行列) は対称行列である。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ は対称行列である。

(3) 任意の n 次正方行列 A に対して $B = \dfrac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ は対称行列である。

● 3 - 4 : 対称行列の固有ベクトル

行列の固有値・固有ベクトルについて復習しよう。

A を n 次正方行列とする。$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の**固有値**であるとは、

(3 - 4 a) $$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ が存在するときをいう。さらに、このような $\mathbf{p}$ を A の固有値 λ に属する**固有ベクトル**と呼ぶ。

対称行列の固有ベクトルについては、次の著しい性質がある。

補題 3-4-1
対称行列の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

(**証明**)
A を n 次対称行列とし、$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ を A の相異なる固有値とする。$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ A の固有値 λ, μ に属する固有ベクトルとする。このとき、A が対称行列であることから、

$$\lambda\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \langle \lambda\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \langle A\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \langle \mathbf{p}, A\mathbf{q}\rangle = \langle \mathbf{p}, \mu\mathbf{q}\rangle = \mu\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle$$

となる。$\lambda \neq \mu$ より、この等式が成立するためには、$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = 0$ でなければならない。 □

例を使って、[補題 3-4-1] を確認しよう。その前に、固有値の求め方を復習しておく。
(3-4 a) は $(\lambda E_n - A)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ と書き変えられる。これより、

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } A \text{ の固有値} &\iff \text{連立一次方程式 } (\lambda E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ が非自明な解を持つ} \\ &\iff |\lambda E_n - A| = 0 \end{aligned}$$

となる。これより、A の固有値は**固有多項式**

(3-4 b) $$\Delta_A(x) = |xE_n - A|$$

の実数根として得られることがわかる。

例 3-4-2 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$ を考える。A の固有多項式 $\Delta_A(x)$ は $\Delta_A(x) = (x+1)(x+4)$ と因数分解されるから、A の固有値は $-1, -4$ である。
次に、A の固有値 -1 と -4 のそれぞれについて、固有ベクトルを求める。
- A の固有値 -1 に属する固有ベクトルは、連立一次方程式

(3-4 c) $$((-1)E_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を解いて、

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$$

で与えられることがわかる。
- A の固有値 -4 に属する固有ベクトルは、連立一次方程式

(3-4 d) $$((-4)E_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を解いて、

$$t\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$$

で与えられることがわかる。
さて、$s, t \neq 0$ に対して

$$\left\langle s\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ t\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = st\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = st(1\cdot(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\cdot 1) = 0$$

となる。これで、A の固有値 -1 に属する固有ベクトルと -4 に属する固有ベクトルとが直交することが確かめられた。 □

No.3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2024 年 10 月 10 日

線形代数 2 事前練習用演習問題

pre3-1. (直交行列)

n 次正方行列 P, Q が直交行列のとき、積 PQ も直交行列であることを示せ。

pre3-2. (対称行列の固有値・固有ベクトル)

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の各固有値 λ に対して、λ に属する A の固有ベクトルを求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre3-1. [補題 3 - 2 - 2] を用いる。

P, Q は直交行列であるから、$P^{\mathrm{T}}P = Q^{\mathrm{T}}Q = E_n$ を満たす。したがって、

$$(PQ)^{\mathrm{T}}(PQ) = (Q^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}})(PQ) = Q^{\mathrm{T}}E_nQ = Q^{\mathrm{T}}Q = E_n.$$

よって、PQ も直交行列である。

pre3-2. (1) A の固有多項式を計算すると、

$$\varDelta_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -8 & 4 \\ -8 & x-1 & -4 \\ 4 & -4 & x-7 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = (x-9)^2(x+9)$$

であることがわかる。したがって、A の固有値は $-9, 9$ であり、このうち、固有値 -9 の重複度は 1 であり、9 の重複度は 2 である。

(2) ● 固有値 -9 に属する A の固有ベクトルを求める。そのために、$-9E_3 - A$ を係数行列とする連立一次方程式 $(-9E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く。

$$-9E_3 - A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots (\text{行基本変形の繰り返し}) \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y - 4z = 0, \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。これを後退代入で解いて、$t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ を得る。

したがって、固有値 -9 に属する A の固有ベクトルは、この中から $\mathbf{0}$ を除いて

$$t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$$

により与えられる。

• 固有値 9 に属する A の固有ベクトルを求める。そのために、$9E_3 - A$ を係数行列とする連立一次方程式 $(9E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く。先ほどと同様にして解くと、実数解

$$s\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

が得られる。したがって、固有値 9 に属する A の固有ベクトルは、この中から $\mathbf{0}$ を除いて

$$s\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R},\ (s,t) \neq (0,0))$$

により与えられる。

線形代数２・第３回 (2024 年 10 月 10 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第３回学習内容チェックシート　2024 年 10 月 10 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ の転置行列は $A^{\mathrm{T}} = \boxed{}$ である。
- (l, m)-行列 A と (m, n)-行列 B に対して、積 AB の転置行列 $(AB)^{\mathrm{T}}$ は A, B の転置行列を用いて、次のように計算される：
$$(AB)^{\mathrm{T}} = \boxed{}.$$
- ベクトルの内積と行列の転置との間には次の関係式が成り立つ：(m, n)-行列 A および n 次列ベクトル $\mathbf{x}$ と m 次列ベクトル $\mathbf{y}$ に対して、
$$\boxed{}.$$
- 行列 A が対称行列であるとは、$\boxed{}$ が成り立つときをいう。対称行列は、「異なる固有値に属する２つの固有ベクトルは $\boxed{}$」という著しい特徴を持つ。

Q2. n 次正方行列 $P = (\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$ が直交行列であるための必要十分条件を、定義を含めて３つ挙げなさい。

- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$

Q3. A を n 次正方行列とする。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
A の固有値 とは？	p.	
A の固有値 λ に属する固有ベクトルとは？	p.	
A の固有多項式 $\varDelta_A(x)$ とは？	p.	

Q4. A を n 次正方行列とする。次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
A の固有値を求めるには？	
A の固有値 λ が求められたとき、λ に属する固有ベクトルを求めるには？	

Q5. 第３回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。