

とする。このとき、“ E_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)” は $M_{mn}(\mathbb{K})$ の正規直交基底である。 $\square$

● 3-2 : 直交性と一次独立

$\mathbb{K}$ 上の n 次元計量空間 V 中の n 個のベクトルの列 “ $u_1, \dots, u_n$ ” が正規直交基底であることを示すには、これが V の基底であって、かつ、(3-1 a) を満たすことを示さなければならないが、実は、(3-1 a) を満たせば、自動的に V の基底になる。これは次の補題からわかる。

補題 3-2-1

V を $\mathbb{K}$ 上の計量空間とする。 V における零でないベクトル $v_1, \dots, v_k$ が互いに直交しているならば、列 “ $v_1, \dots, v_k$ ” は $\mathbb{K}$ 上一次独立である。

例 3-2-2 $C[-\pi, \pi]$ において関数

$$(3-2 a) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \dots$$

を考える。 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}), \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \end{aligned}$$

となるので、(3-2 a) のどの 2 つの関数も直交し、どの関数もノルムが 1 であることがわかる。 $\square$

注意. 上の例のように、互いに直交し、長さが 1 のベクトルの列を**正規直交系**と呼ぶ。

([補題 3-2-1] の証明)

$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0_V$ ($t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$) とおく。 $j = 1, \dots, k$ を固定する。 $i \neq j$ ならば $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ であるから

$$0 = \langle t_1 v_1 + \dots + t_k v_k, v_j \rangle = t_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + t_k \langle v_k, v_j \rangle = t_j \langle v_j, v_j \rangle$$

を得る。 $v_j \neq 0_V$ であるから $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$ となる。これより、 $t_j = 0$ となり、“ $v_1, \dots, v_k$ ” は一次独立である。 $\square$

n 次元ベクトル空間において、 n 個のベクトルの組が一次独立であることと基底であることは同値であるから、[補題 3-2-1] より、次の結果を得る。

系 3-2-3

$\mathbb{K}$ 上の n 次元計量空間 V の n 個のベクトル $v_1, \dots, v_n$ に対して

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, n) \iff “v_1, \dots, v_n” \text{ は } V \text{ の正規直交基底.}$$

例 3-2-4 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ ($i = 1, 2, 3$), $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ を満たす。よって、“ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ” は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である。 $\square$

ベクトルを正規直交基底の一次結合で書くことは、次の補題が示すように、易しい。

補題 3-2-5

“ $u_1, \dots, u_n$ ” を n 次元計量空間 V の正規直交基底とする。このとき、任意の $v \in V$ は

$$(3-2\text{ b}) \quad v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n$$

と書き表わされる。

(証明)

$v = t_1 u_1 + \dots + t_n u_n$ ($t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$) と書く。このとき、

$$\begin{aligned} \langle v, u_i \rangle &= \langle t_1 u_1 + \dots + t_n u_n, u_i \rangle \\ &= t_1 \langle u_1, u_i \rangle + \dots + t_n \langle u_n, u_i \rangle \\ &= t_i \langle u_i, u_i \rangle \\ &= t_i \end{aligned}$$

となる。よって、 v は (3-2 b) のように正規直交基底 “ $u_1, \dots, u_n$ ” の一次結合で書き表わされる。 $\square$

例 3-2-6 [例 3-2-4] で与えられている $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 “ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ” を考える。このと

き、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b)\mathbf{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}(-a-b+2c)\mathbf{v}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

のように表わされる。 $\square$

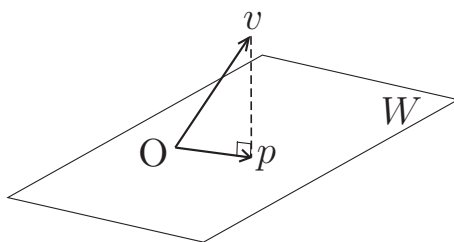
● 3-3 : 正射影

グラム-シュミットの直交化法は次節で説明するが、その基礎となる考え方は、正射影を利用してベクトルを直交するように繰り返し取りかえていくことにある。そこで、正射影について述べる。

W を $\mathbb{K}$ 上の計量空間 V の部分空間とする。 $v \in V$ の W への**正射影**とは、 $p \in W$ であって、任意の $w \in W$ に対して

$$\langle v - p, w \rangle = 0$$

を満たすもののことをいう。



このような p は (存在すれば) v に対して一意である。

∴)

$q \in W$ も p と同じ性質を満たすとする。すると、任意の $w \in W$ に対して

$$\langle p - q, w \rangle = \langle (p - v) + (v - q), w \rangle = \langle p - v, w \rangle + \langle v - q, w \rangle = 0$$

となる。 $p - q \in W$ であるから、特に、 $\langle p - q, p - q \rangle = 0$ を得る。これは、 $p - q = 0$, すなわち、 $p = q$ となることを意味する。□

v の W への正射影は、今示したように、存在すれば一意であるが、存在については言及しなかった。実は、有限次元計量空間 V における任意のベクトル v と部分空間 W に対して、 v の W への正射影が存在する。その証明は次節で与えるが、ここでは、特別な状況の下での正射影の存在を示す(次の補題とグラム-シュミットの直交化法により、一般の場合の正射影が存在が示される)。

補題 3-3-1

(1) L を “ v_1 ” を基底にもつ V の 1 次元部分空間とする。このとき、任意の $v \in V$ に対し、

$$(3-3 a) \quad p = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

は v の L への正射影である。

(2) W を “ $u_1, \dots, u_k$ ” を基底に持つ V の部分空間であって、 $u_1, \dots, u_k$ の中のどの 2 つも直交すると仮定する。このとき、任意の $v \in V$ に対して

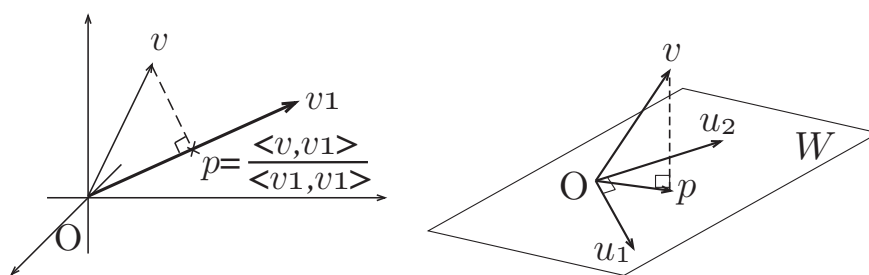
$$(3-3 b) \quad p = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$$

は v の W への正射影である。

(証明)

任意の u_i ($i = 1, \dots, k$) に対して $\langle v - p, u_i \rangle = 0$ となることを示せばよい。これは簡単に確かめられる。□

注意. 補題の p の見つけ方は以下の通りである。



p が v の L への正射影であったとすると、 $p = tv_1$ ($t \in \mathbb{K}$) とおくことができる。 $\langle v - p, v_1 \rangle = 0$ でなければいけないから、 $\langle v - tv_1, v_1 \rangle = 0$ を t に関して解いて、 $t = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$ となる。

同様に、 p が v の W への正射影であったとすると、 $p \in W$ より、

$$p = t_1 u_1 + \dots + t_k u_k \quad (t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K})$$

とおくことができる。 $\langle v - p, u_i \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, k$) でなければいけないから、

$$\langle v - (t_1 u_1 + \dots + t_k u_k), u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - t_1 \langle u_1, u_i \rangle - \dots - t_k \langle u_k, u_i \rangle = 0$$

を得る。ベクトル $u_1, \dots, u_k$ は互いに直交することから、左辺は $\langle v, u_i \rangle - t_i \langle u_i, u_i \rangle$ に等しい。これより、 t_i が求まり、 p は補題の形に書かれることがわかる。

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre3-1. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ によって張られる直線を L とし、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ によって張られる平面を H とおく。 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の L への正射影と H への正射影を求めよ。

pre3-2. (1) V を $\mathbb{K}$ 上の計量空間とし、“ $u_1, \dots, u_k$ ” を V の正規直交系とする。任意の $v \in V$ に対して

$$|\langle v, u_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, u_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

が成立することを示せ。この不等式を**ベッセル (Bessel) の不等式**という。

(2) $C[-\pi, \pi]$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体のなす計量空間とする ($C[-\pi, \pi]$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はいつもの内積とする)。任意の $f \in C[-\pi, \pi]$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, 1 \rangle^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (\langle f, \cos kx \rangle^2 + \langle f, \sin kx \rangle^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

注意. (2) の不等式より、正項級数 $\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} (\langle f, \cos nx \rangle^2 + \langle f, \sin nx \rangle^2)$ は上に有界であるから収束する。したがって、

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, 1 \rangle^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, \cos nx \rangle^2 + \langle f, \sin nx \rangle^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre3-1. [補題 3-3-1] の公式に当てはめて計算すればよい。

$\mathbf{v}$ の L, H への正射影をそれぞれ $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ とおく。 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ であるから、

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} = \frac{2a+2b-c}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5a+2b-4c \\ 2a+8b+2c \\ -4a+2b+5c \end{pmatrix}.$$

pre3-2. (1) “ $u_1, \dots, u_k$ ” が正規直交系であることから $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle$ ($i = 1, \dots, k$) とおくと

$$\left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right\|^2 = |\langle v, u_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, u_k \rangle|^2$$

と表わされる。このことに注意して不等式を導くとよい。(2) は (1) の応用として得られる。

(1) $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ なので、正射影の考え方より $v - \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ と $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ は直交する。よって、ピタゴラスの定理より

$$\|v\|^2 = \left\| v - \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right\|^2 \geq \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right\|^2 = |\langle v, u_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, u_k \rangle|^2.$$

(2) (1) の不等式を、 $V = C[-\pi, \pi]$ で、 V の正規直交系が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

の場合に書くと、(2) の不等式になる。

第3回(2025年4月21日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、 $v_1, \dots, v_n \in V$ とする。(1) “ $v_1, \dots, v_n$ ” が V を張るとはどんなときをいうか？その定義を書け。(2) “ $v_1, \dots, v_n$ ” が $\mathbb{K}$ 上一次独立であることの定義を書け。(3) V の基底とは何か。その定義を書け。(4) V の次元 $\dim V$ とは何か。その定義を書け。(5) V に (エルミート) 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が与えられているとき、計量空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ における正規直交基底とは何か。その定義を書け。Q2. (1) 通常の (エルミート) 内積を備えた $\mathbb{K}^n$ において、最も基本的と思われる正規直交基底の例を1つ挙げよ。(2) 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体 $C[-\pi, \pi]$ を、いつものように内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を導入して実計量空間とみなす。整数 $m \geq 1, n \geq 0$ に対して、 $f_m, g_n \in C[-\pi, \pi]$ を $f_m(x) = \sin mx, g_n(x) = \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) により定める。 $m, m' \geq 1, n, n' \geq 0$ に対して、

$$\langle f_m, f_{m'} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \langle g_n, g_{n'} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \langle f_m, g_n \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

Q3. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\mathbb{K}$ 上の計量空間、 W をその部分空間とし、 $v \in V$ とする。(1) v の W への正射影とは何か？その定義を書け。(2) W が “ v_1 ” を基底に持つ1次元の部分空間であるとき、 v の W への正射影はどのような式で与えられるか。(3) W が “ v_1, v_2 ” を基底に持つ2次元の部分空間であって v_1, v_2 が直交するとき、 v の W への正射影はどのような式で与えられるか。

Q4. 第3回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。