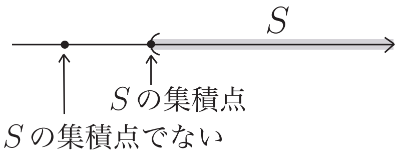
§3. 関数の極限

この節では関数の極限の概念を学ぶ。

● 3-1：集積点



集合 S 上で定義されている関数 $f(x)$ に対して x を実数 a に近づけたときの極限を定義したい。このとき、a は何でもよいわけではない。例えば、関数 $\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ における変数 x を -1 に近づけることはできない。「a に近づける」ことができるためには、a のいくらでも近くに S の元 x が存在することが必要である。この条件を満たす a を S の集積点と呼ぶ。すなわち、

(3-1 a)
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ かつ } x_n \in S,\ x_n \neq a\ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が少なくとも 1 つ存在するような実数 a を S の**集積点**という。

例 3-1-1 集合 $S = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\ \}$ に対して任意の実数は S の集積点である。

● 3-2：関数の極限

$f(x)$ を集合 S 上で定義された関数とし、a を S の集積点とする。(3-1 a) を満たすどのような数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が一定の実数 α に収束するとき、$f(x)$ は $x \to a$ のとき**収束する**といい、

(3-2 a)
$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \ \ (x \to a)$$

と表わす。α を x を a に近づけたときの関数 $f(x)$ の極限という。

例 3-2-1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ である。一方、$\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ は存在しない。

(証明)

(1) 0 に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \neq 0)$ に対して、

$$0 \leq \left| x_n \sin\frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n|$$

である。$n \to \infty$ のとき $|x_n| \to 0$ であるから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n\to\infty} x_n \sin\frac{1}{x_n} = 0$$

を得る。よって、$\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ である。

(2) $\sin x$ は振動する関数なので収束しない。実際、0 に収束する数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = 1$$

となって、極限が 1 つに定まらないので、$\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ は存在しない。 □

$f(x)$ を集合 S 上で定義された関数とし、

(3-2 b)
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ \ (\text{resp.} \ \ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty) \ \ \text{かつ} \ \ x_n \in S\ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が少なくとも 1 つ存在すると仮定する。この条件を満たすどのような数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が一定の実数 α に収束するとき、関数 $f(x)$ $(s \in S)$ は $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$) のとき α に**収束する**といい、

(3 - 2 c)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \ \ (x \to +\infty)$$
$$\Big(\text{resp.} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \ \ (x \to -\infty)\Big)$$

と表わす。α を x を $+\infty$ (resp. $-\infty$) に飛ばしたときの関数 $f(x)$ の極限という。

● 3 - 3 : 関数の和差積商と極限

関数の和差積商の極限についても、数列の和差積商の極限と同様の公式が成り立つ。

補題 3 - 3 - 1

a を実数あるいは $\pm\infty$ とする。集合 S 上で定義された 2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ が $x \to a$ のとき収束するならば、4 つの関数

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

は $x \to a$ のときすべて収束して、次が成り立つ。

- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ (複号同順),
- $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$,
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

但し、商については、すべての x について $g(x) \neq 0$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ であるとする。

(**証明**)

ここでは和に関してのみ示す (差積商についても同様に示される)。$\alpha = \lim_{x\to a} f(x),\ \beta = \lim_{x\to a} g(x)$ とおく。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $x_n \in S,\ x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たす数列とする。このとき、仮定より、$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \beta$ が成り立つ。収束する 2 つの数列の和は収束し、その極限はそれぞれの数列の極限の和に等しいから、

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \alpha + \beta$$

を得る。これは関数 $f(x) + g(x)$ が $x \to a$ のとき収束して、$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ となることを意味する。 □

例 3 - 3 - 2 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+2x^2}{3x^4-4x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

解；

$x \neq 0$ において

$$\frac{x^3+2x^2}{3x^4-4x^2} = \frac{x^2(x+2)}{x^2(3x^2-4)} = \frac{x+2}{3x^2-4}$$

であるから、

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2}{3x^4-4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{3x^2-4} = \frac{\lim_{x\to 0}(x+2)}{\lim_{x\to 0}(3x^2-4)} = \frac{0+2}{3\cdot 0^2-4} = -\frac{1}{2}.$$

● 3 - 4 : 不等式と関数の極限

a を実数あるいは $\pm\infty$ とする。集合 S 上で定義された 2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ が $x \to a$ のとき収束し、S 内すべての実数 $x\ (\neq a)$ に対して $f(x) \leq g(x)$ であるならば、$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ となる。さらに、数列の極限と同様に、関数の極限についてもはさみうちの原理が成り立つ。

補題 3 - 4 - 1 (はさみうちの原理)

a を集合 S の集積点とし、S 上で定義された 3 つの関数 $f(x),\ g(x),\ h(x)$ が次の (i),(ii) を満たしているとする。

(i) 任意の $x \in S$ に対して、$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

(ii) $f(x), h(x)$ は $x \to a$ のとき共に α に収束する。

このとき、$g(x)$ も $x \to a$ のとき α に収束する。

● 3 - 5 : 三角関数の極限

次の補題は、後の節において、三角関数が微分可能であることを示すときに使われる。

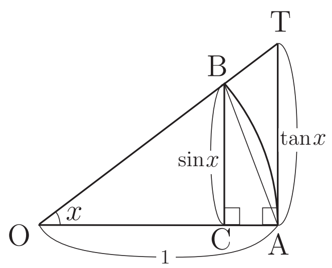
補題 3 - 5 - 1

(3 - 5 a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(3 - 5 b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

(証明)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ として、右図のように、中心が O で半径が 1 の円周上に、$\angle\mathrm{AOB} = x$ となるように、2 点 A, B をとる。さらに、半直線 OB と A における接線との交点を T とし、B から半直線 OA に下ろした垂線の足を C とする。このとき、



$$(\triangle\mathrm{BOA}\text{ の面積}) < (\text{扇形 AOB の面積}) < (\triangle\mathrm{OTA}\text{ の面積})$$

であるから、

(∗)
$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

が成り立つ。両辺に $\frac{2}{\sin x}$ を掛けて逆数をとると、

(∗∗)
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

となる。この不等式は、x の代わりに $-x$ を代入しても成り立つから、(∗∗) は $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成立する。

(3 - 5 c)
$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

となることが示されれば、(∗∗) とはさみうちの原理により、

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

がわかる。そこで、(3-5 c) を示す。(2-5 f) と $(*)$ より、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ となる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{x^2}{2} \tag{$***$}$$

を得る。この不等式は、x の代わりに $-x$ を代入しても成り立つから、この不等式は $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成立する。よって、収束の定義から、(3-5 c) がわかる。

さらに、$(***)$ より、$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Big|\frac{\cos x - 1}{x}\Big| < \frac{|x|}{2}$$

となるから、収束の定義から、(3-5 b) を得る。 □

2026 年 4 月 23 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 3 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. S を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とします。

(1) S の集積点とは何ですか。その定義を下の枠内に書きなさい。

(2) $S = \{\ x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\ \} \cup \{0\}$ とします。0 と -1 はそれぞれ S の集積点ですか？理由をつけて答えなさい。

	集積点か否か	理由
0		
-1		

Q2. $f(x)$ を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 S 上で定義されている関数とし、a を S の集積点とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味	記号
関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき実数 α に収束することの意味と表し方	p.		

Q3. a を集合 S の集積点とします。S 上で定義された関数 $f(x)$ について、$x \to a$ のときの極限が存在しないことを示すにはどうすればよいですか。解決方法を 1 つ書きなさい。

Q4. 次の $\boxed{}$ に適当な記号や数字を入れなさい。

- 集合 S 上で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x \to a$ のとき $\boxed{}$ すれば、関数 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の $x \to a$ のときの極限は $\alpha = \lim_{x\to a} f(x)$, $\beta = \lim_{x\to a} g(x)$ から次のように求めることができる：

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \boxed{} \text{(複号同順)},\ \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \boxed{},\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{}.$$

　但し、商は $g(x) \neq 0$ $(x \in S)$ かつ $\beta \neq 0$ のときにのみ考える。

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \boxed{}.$

Q5. 第 3 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。