

§3. 関数の極限と微分

この節では、実数値関数の考え方を復習する。後半では、関数の極限と微分の概念を復習する。

● 3-1：実数全体からなる集合

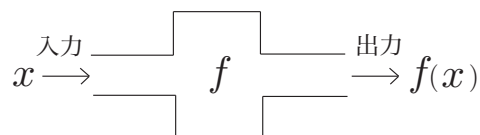
実数全体からなる集合を $\mathbb{R}$ という記号で表わす。「 a は実数である」ということを「 $a \in \mathbb{R}$ 」で表わす。例えば、「 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ 」は「 $\sqrt{2}$ は実数である」ということを表わす。同様に、 $\mathbb{R}$ の部分集合 S に対して、 a が S の要素であることを $a \in S$ のように書き表わす。

● 3-2：関数とは

実数 x に対して x^2 を $f(x)$ とおいてみよう：

$$f(x) = x^2.$$

x が $1, \sqrt{2}, -\pi$ など様々な実数の値をとるとき、 $f(x)$ もまた $f(1) = 1, f(\sqrt{2}) = 2, f(-\pi) = \pi^2$ など様々な実数の値をとる。 f は実数 x を入力すると、 x^2 という実数を出力する「装置」のようなものと考えられる。



一般に、 $\mathbb{R}$ の (空でない) 部分集合 S の要素を1つ入力すると、実数を1つだけ出力するような「装置」 f のことを S 上で定義された (一変数実数値) **関数** といい、 S をその **定義域** という。 f に S の要素 x を入力したときに出力される実数を $f(x)$ で表わす。 S を定義域とする関数 f のことを「関数 $f(x)$ ($x \in S$)」のように表現することが多い。通常、0 以外の実数全体からなる集合を定義域とする関数を「関数 $f(x)$ ($x \neq 0$)」と表わし、0 以上の実数全体からなる集合を定義域とする関数を「関数 $f(x)$ ($x \geq 0$)」と表わす。

例 3-2-1 (1) どんな実数 x を入力しても、定数 c を出力する関数を c への **定数関数** と呼ぶ。この講義ではこの定数関数を $\underline{c}$ で表わす。例えば、 $\underline{2}(x) = 2$ ($x \in \mathbb{R}$) である。

(2) 「関数 $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ ($x \in \mathbb{R}$)」は、実数 x を入力したときに実数 $-x^2 + 3x + 5$ を出力する関数を表わす。一般に、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ を定数とすると、 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$(3-2 \text{ a}) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (x \in \mathbb{R})$$

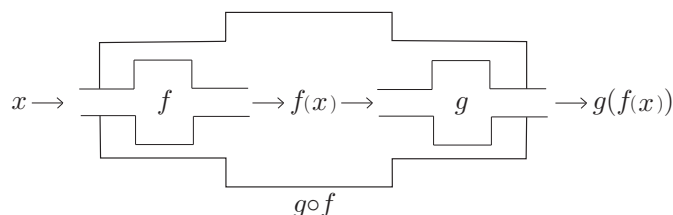
が考えられる。この関数を **多項式関数** と呼ぶ。

● 3-3：合成関数

S_1 上で定義された関数 $f(x)$ と S_2 上で定義された関数 $g(y)$ が **合成可能である** とは、すべての $x \in S_1$ について $f(x) \in S_2$ が満たされるときをいう。このとき、 S_1 を定義域とする関数 $h(x)$ が $h(x) = g(f(x))$ ($x \in S_1$) により定まる。

このように定義される関数 h を f と g の **合成関数** といい、 $g \circ f$ で表わす：

$$(3-3 \text{ a}) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in S_1).$$



例 3-3-1 関数 $h(x) = \sqrt{2x-1}$ ($x \geq \frac{1}{2}$) は、2つの関数

$$f(x) = 2x - 1 \quad (x \geq \frac{1}{2}) \quad \text{と} \quad g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

の合成関数 $g \circ f$ に等しい。

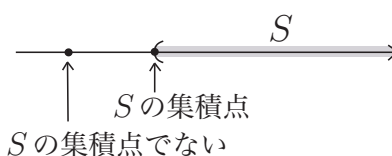
● 3-4：集積点

集合 S 上で定義されている関数 $f(x)$ に対して x を実数 a に近づけたときの極限を定義したい。このとき、 a は何でもよいわけではない。例えば、関数 $\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) における変数 x を -1 に近づけることはできない。「 a に近づける」

ことができるためには、 a のいくらでも近くに S の元 x が存在することが必要である。この条件を満たす a を S の集積点と呼ぶ。すなわち、

$$(3-4 a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ かつ } x_n \in S, x_n \neq a \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が少なくとも1つ存在するような実数 a を S の**集積点**という。



例 3-4-1 集合 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ に対して任意の実数は S の集積点である。

● 3-5：関数の極限

$f(x)$ を集合 S 上で定義された関数とし、 a を S の集積点とする。(3-4 a) を満たすどのような数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が一定の実数 α に収束するとき、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき**収束する**といい、

$$(3-5 a) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a)$$

と表わす。 α を x を a に近づけたときの関数 $f(x)$ の極限という。

例 3-5-1 (1) 任意の $a \in \mathbb{R}$ と自然数 k に対して $\lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k$ である。

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ である。}$$

(証明)

(1) a に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($x_n \neq a$) に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^k = a^k$ となる。

(2) 0 に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($x_n \neq 0$) に対して、

$$0 \leq \left| x_n \sin \frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n|$$

である。 $n \rightarrow \infty$ のとき $|x_n| \rightarrow 0$ であるから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sin \frac{1}{x_n} = 0$$

を得る。よって、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ である。

□

● 3-6：関数の和差積商と極限

定義域が同一の集合 S であるような2つの実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が与えられたとき、 S を定義域とする4つの実数値関数 $f+g$, $f-g$, fg , $\frac{f}{g}$ を新たに次のようにして作ることができる（但し、4番目の関数は、すべての $x \in S$ について $g(x) \neq 0$ のときのみ作ることができる）。

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in S)$$

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x) \quad (x \in S)$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x) \quad (x \in S)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in S)$$

この4つの関数を、上から順に、 f と g の**和**、**差**、**積**、**商**と呼ぶ。また、 c を実数とすると、 S を定義域とする実数値関数 cf を

$$(cf)(x) := cf(x) \quad (x \in S)$$

によって定める。 cf は定数関数 $\underline{c}$ と f との積に他ならない： $cf = \underline{c}f$ 。

関数の和差積商の極限についても、数列の和差積商の極限と同様の公式が成り立つ。

補題 3-6-1

集合 S 上で定義された2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x \rightarrow a$ のとき収束するならば、この2つの関数の和、差、積、商は $x \rightarrow a$ のときすべて収束して、次が成り立つ。

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (\text{複号同順}),$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right),$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

但し、商については、すべての x について $g(x) \neq 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ であるとする。

例 3-6-2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^4 - 4x^2} = -\frac{1}{2}.$

解：

$$x \neq 0 \text{ において } \frac{x^3 + 2x^2}{3x^4 - 4x^2} = \frac{x^2(x+2)}{x^2(3x^2 - 4)} = \frac{x+2}{3x^2 - 4} \text{ であるから、}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^4 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{3x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4)} = \frac{0+2}{3 \cdot 0^2 - 4} = -\frac{1}{2}.$$

● 3-7：不等式と関数の極限

集合 S 上で定義された2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x \rightarrow a$ のとき収束し、 S 内すべての実数 x ($x \neq a$) に対して $f(x) \leq g(x)$ であるならば、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ となる。さらに、数列の極限と同様に、関数の極限についてもはさみうちの原理が成り立つ。

● 3-8：関数の微分

$a < b$ なる実数 a, b に対して、 $a < x < b$ を満たす実数 x の全体からなる集合を (a, b) と書き、(有界) **开区間**という：

$$(3-8 \text{ a}) \quad (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

$a = -\infty$ や $b = +\infty$ のときにも同様に (a, b) を定義し、开区間という。特に、 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ と表わすことができるので、 $\mathbb{R}$ は开区間である。

开区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が点 $a \in I$ で**微分可能**であるとは、極限

$$(3-8\text{ b}) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するときをいう。その値を $f(x)$ の a における**微分係数**といい、 $f'(a)$ や $\frac{df}{dx}(a)$ などと表わす。

すべての $a \in I$ で $f(x)$ が微分可能なとき、 $f(x)$ は**微分可能**であるといい、 $a \in I$ を入力したときに微分係数 $f'(a)$ を出力する関数を $f(x)$ の**導関数**という。

補題 3-8-1

开区間 I 上で定義された2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が $a \in I$ で微分可能ならば、この2つの関数の和、差、積、商はすべて a で微分可能であり、微分係数は次で与えられる：

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ (複号同順),
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (**ライプニッツの公式**)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

但し、4番目の商については、すべての $x \in I$ について $g(x) \neq 0$ かつ $g'(a) \neq 0$ であるときのみ考えることができる。

例 3-8-2 (1) n を自然数として $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x) = x^n$ は2つの微分可能な関数 $f_1(x) = x$ と $f_{n-1}(x) = x^{n-1}$ の積であるから微分可能であり、帰納法により

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = (x)' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

(2) n を自然数として関数 $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$ ($x \neq 0$) は微分可能であり、その導関数は商の微分公式と(1)より、 $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ となる。

例 3-8-3 (1) 正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$ は微分可能であり、それらの導関数は

$$(3-8\text{ c}) \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

(2) e をネイピア数とする。指数関数 e^x ($x \in \mathbb{R}$) は微分可能で、 $(e^x)' = e^x$ である。

(3) 対数関数 $\log x$ ($x > 0$) は微分可能で、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ である。

(4) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対してべき関数 x^α ($x > 0$) は微分可能で、 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ である。

定理 3-8-4

开区間 I_1 上で定義された関数 $f(x)$ と开区間 I_2 上で定義された関数 $g(y)$ は合成可能であるとする。 $f(x)$ が点 $a \in I_1$ で微分可能で、 $g(y)$ が点 $f(a)$ で微分可能ならば、合成関数 $(g \circ f)(x)$ は点 a で微分可能である。さらに、微分係数は次式により与えられる：

$$(3-8\text{ d}) \quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

例 3-8-5 関数 $h(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$ ($x \in \mathbb{R}$) は、2つの微分可能な関数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$) と $g(y) = y^5$ ($y \in \mathbb{R}$) の合成関数であるから微分可能であり、導関数は $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (2x - 3)$ により与えられる。

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 3 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
S 上の関数とは？	p.	
関数 $f(x)$ ($x \in S_1$) と関数 $g(y)$ ($y \in S_2$) が合成可能であるとき、合成関数 $g \circ f$ とは？	p.	
開区間 (a, b) とは？	p.	

Q2. 次の に適当な記号や数字を入れなさい。

- 関数 f を $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) によって定義するとき、関数 $6f^2 + 2\sin$ に $\frac{\pi}{2}$ を入力すると が出力され、 $\frac{7\pi}{6}$ を入力すると が出力される。
- 関数 g, h を $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = 3x^2 + x + 2$ ($x \in \mathbb{R}$) によって定義するとき、関数 $h \circ g$ に 1 を入力すると が出力され、 $-\frac{1}{2}$ を入力すると が出力される。
- 関数 $f(x)$ ($x \in I$) の点 $a \in I$ における微分係数とは、極限 のことをいい、これを または で表わす。 f の導関数 f' とは、 $x \in I$ を入力したときに を出力する I 上の関数のことである。
- 微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ ($x \in I$) の和差積商は微分可能であり、それらの導関数は
 - $(f + g)'(x) = \text{}$ $(f - g)'(x) = \text{}$
 - $(fg)'(x) = \text{}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \text{}$により与えられる。このうち、積に対する公式は の公式と呼ばれる。
- 微分可能な関数 $f(x)$ ($x \in I_1$) と微分可能な関数 $g(y)$ ($y \in I_2$) が合成可能なとき、合成関数 $(g \circ f)(x)$ ($x \in I_1$) は微分可能であり、その導関数は次の公式で与えられる。
$$(g \circ f)'(x) = \text{}$$
- 正弦関数, 余弦関数, 指数関数, 対数関数は微分可能であり、導関数は次式で与えられる：
$$(\sin x)' = \text{}, \quad (\cos x)' = \text{}, \quad (e^x)' = \text{}, \quad (\log x)' = \text{}$$
- n を自然数とする。1 への定数関数 $\underline{1}$, 関数 $f_n(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$), $g_n(x) = x^{-n}$ ($x \neq 0$) はすべて微分可能であり、これらの導関数はそれぞれの定義域内の実数 x に対して $\underline{1}'(x) = \text{}$, $f_n'(x) = \text{}$, $g_n'(x) = \text{}$ により与えられる。

Q3. 第 3 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。