

§3. べき級数

この節では、「変数」を含む級数、すなわち、べき級数の概念を学ぶ。べき級数は、項が無限に続く多項式とすることができる。後半では、ある種の関数はべき級数で表わすことができること、すなわち、Maclaurin 級数展開可能であることを示す。そして、指数関数、三角関数などの Maclaurin 級数展開を求める。

● 3-1：べき級数の定義

x を変数とするべき級数とは、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を定数として、次の形に書かれる級数（形式和）のことをいう：

$$(3-1 \text{ a}) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

これは $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ と書くこともできる。

べき級数の変数 x に具体的な数 $x = x_0$ を代入すると（ $n = 0$ から始まる）級数が得られる。

例 3-1-1 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ において、 $x = 1$ を代入すると、級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

が得られる（右辺の $+$ は形式的な記号に注意）。

● 3-2：べき級数の収束半径

べき級数 (3-1 a) における x に具体的な数 x_0 を代入することにより得られる級数

$$(3-2 \text{ a}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$$

は、 x_0 の値によって収束したりしなかったりする。どのような実数 x_0 について収束するのであろうか。ここでは、この問題について考える。

まず、少なくとも $x = 0$ においてべき級数 (3-1 a) は収束することがわかる。実際、べき級数 (3-1 a) に $x = 0$ を代入すると、級数

$$a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

が得られるが、これは a_0 に収束している。

定理 3-2-1

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ が $x = x_0$ ($\neq 0$) で収束すれば、 $|x| < |x_0|$ であるようなすべての実数 x において（絶対）収束する。

(証明)

$|x| < |x_0|$ であるような実数 x を任意にとり、 $r = \left| \frac{x}{x_0} \right|$ (< 1) とおくと

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = |a_nx_0^n| \cdot r^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と書ける。級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ は収束するので、[定理 2-4-1] により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ であり、収束する数列は有界であるから、

$$|a_n x_0^n| < K \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす実数 $K > 0$ が存在する。よって、

$$|a_n x^n| < K r^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を得る。 $r < 1$ なので級数 $\sum_{n=0}^{\infty} K r^n$ は収束する。比較判定法により、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束する。すなわち、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する。□

上の定理により、べき級数 (3-1 a) に対して、

(Case 1) すべての実数 x において収束する。

(Case 2) 0 以外のすべての実数 x において収束しない。

のどちらでもない時には、次の状況が起きることがわかる：

(Case 3) 「 $|x| < r$ なるすべての実数 x において収束し、かつ、 $|x| > r$ なるすべての実数 x において収束しない」ような実数 $r > 0$ が存在する。

べき級数 (3-1 a) の収束半径 R を、上の3つの状況に応じて、以下のように定義する。

$$R = \begin{cases} \infty & ((\text{Case 1}) \text{ のとき}) \\ 0 & ((\text{Case 2}) \text{ のとき}) \\ r & ((\text{Case 3}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

例 3-2-2 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は、[例 2-3-2] より、 $+\infty$ である。□

定理 3-2-3

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について、

$$(3-2 \text{ b}) \quad a_n \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$(3-2 \text{ c}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \text{ が存在する}$$

が成り立っているとき、べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $R = \frac{1}{\rho}$ である。但し、 $\rho = 0$ のときには、 $R = \infty$ と解釈する。

(証明)

$x \neq 0$ とする。このとき、次が成り立つ：

$$(*) \quad \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \rightarrow \rho |x| \quad (n \rightarrow \infty)$$

• $\rho = 0$ のとき： $\rho |x| = 0$ であるから、(*) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = 0 < 1$$

である。ダランベールの判定法により、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束する。よって、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ も収束する。したがって、 $\rho = 0$ のとき、べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ∞ である。

• $\rho \neq 0$ のとき： $|x| < \frac{1}{\rho}$ ならば、(*) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \rho |x| < 1$$

となる。ダランベールの判定法により、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は(絶対)収束することがわかる。

他方、 $|x| > \frac{1}{\rho}$ ならば、(*) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \rho |x| > 1$$

となる。ダランベールの判定法により、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は $+\infty$ に発散することがわかる。

今、 $|x_0| > \frac{1}{\rho}$ であるようなある実数 x_0 に対して、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束したと仮定すると、[定理 3-2-1] により、 $\frac{1}{\rho} < |x| < |x_0|$ を満たす実数 x において、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束していなければいけない。これは先ほど導いた結果に矛盾する。したがって、 $|x_0| > \frac{1}{\rho}$ であるような実数 x_0 に対して、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束することはない。

以上の考察から、 $\rho \neq 0$ のとき、べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $\frac{1}{\rho}$ であることがわかる。□

例 3-2-4 べき級数

$$(3-2 d) \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

の収束半径は ∞ である。

(略解)

y を変数とするべき級数

$$(\#) \quad 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{y^m}{(2m+1)!} + \cdots$$

の収束半径を R とおくと、与えられたべき級数の収束半径は $\sqrt{R}$ である。今、 $b_m = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) とおくと、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| = 0$ とわかるので、[定理 3-2-3] より、べき級数 (#) の収束半径は ∞ であり、したがって、与えられたべき級数の収束半径も ∞ である。□

● 3-3 : Maclaurin 級数展開

0 を含む開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が何回でも微分可能なとき、べき級数

$$(3-3 a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

が考えられる。これを関数 $f(x)$ の **Maclaurin 級数** という。

ここで、各 $x \in I$ について、 $f(x)$ は、

$$(3-3 b) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

と表わされたを思い出そう（第 n 次 Maclaurin 展開）。もし、

$$(3-3c) \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるのであれば、

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = |R_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、べき級数 (3-3 a) は $f(x)$ に収束する。したがって (3-3 c) が成り立つときには、関数 $f(x)$ を Maclaurin 級数に展開することができる：

$$(3-3d) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

すべての $x \in I$ に対して $f(x)$ が上のように表わされるとき、関数 $f(x)$ は **Maclaurin 級数展開可能**であるという。(3-3 c) が成り立てば関数 $f(x)$ は Maclaurin 級数展開可能である。

例 3-3-1 指数関数, 正弦関数, 余弦関数は Maclaurin 展開可能であり、それぞれの Maclaurin 級数展開は以下で与えられる：

$$(3-3e) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$(3-3f) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

$$(3-3g) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots$$

(証明)

● 指数関数について：

$f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) とおくと、 $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから、 $f(x)$ の第 n 次 Maclaurin 展開は

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x} x^n}{n!} \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\theta x} x^n}{n!} = e^{\theta x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = e^{\theta x} \cdot 0 = 0$ であるから、指数関数 $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) は Maclaurin 展開可能であり、その Maclaurin 級数展開は (3-3 e) で与えられる。

● 正弦関数について：

$g(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) とおくと、 $g^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ であるから、 $g(x)$ の第 n 次 Maclaurin 展開は

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{\sin(\frac{(n-1)\pi}{2})x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + \frac{n\pi}{2})x^n}{n!} \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。ここで、

$$\left| \frac{\sin(\theta x + \frac{n\pi}{2})x^n}{n!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、正弦関数 $g(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) は Maclaurin 展開可能であり、その Maclaurin 級数展開は (3-3 f) で与えられる。余弦関数についても同様に示すことができる。□

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 3 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
べき級数とは？	p.	
べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とは？	p.	
関数 $f(x)$ の Maclaurin 級数とは？	p.	
指数関数 $\exp(x) = e^x$ の Maclaurin 級数展開は？	p.	

Q2. 次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
$a_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき、べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R を求めるためには？	
0 を含むある開区間上で定義された、何回でも微分可能な関数 $f(x)$ が Maclaurin 級数展開可能であるための条件は？	

Q3. 第 3 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。