§4. 直交行列による対角化

ここでは、まず、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の勝手に与えられた基底から正規直交基底 (互いに直交する長さ 1 の基底) を作り出す方法–グラム-シュミットの直交化法—について説明する。次に、その応用として、対称行列を直交行列によって対角化する方法を説明する。

● 4 - 1 : 正射影

グラム-シュミットの直交化法の基礎となる補題を 2 つ述べる。

補題 4 - 1 - 1

$\mathbb{R}^n$ の原点を通る直線 L は $\mathbf{a}$ を方向ベクトルに持っているとする。このとき、$\mathbb{R}^n$ の点 $\mathbf{v}$ から L へ下ろした垂線の足 (の座標ベクトル) $\mathbf{p}$ は

(4 - 1 a) $$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{a},\ \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a},\ \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a}$$

で与えられる。$\mathbf{p}$ を $\mathbf{v}$ の L への**正射影**と呼ぶ。

注意：上の補題において、「$\mathbb{R}^n$ の点 $\mathbf{v}$」という書き方をした。このような表現方法は、ユークリッド空間における元 (ベクトル) を幾何学的対象として扱いたいときにしばしば使われる。これはまた空間の点と (原点を始点に選んだときの) 点の位置ベクトルとを同一視した表現方法とも言える。

([**補題 4 - 1 - 1**] **の証明**)

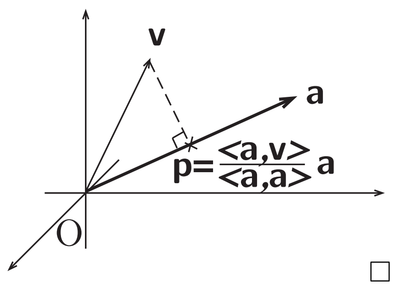
$\mathbf{v}$ の L への正射影 $\mathbf{p}$ は L 上にあるから

$$\mathbf{p} = t\mathbf{a} \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおくことができる。ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ は直交するから、

$$\langle \mathbf{a},\ \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle = 0$$

を満たさなければならない。左辺は $\langle \mathbf{a},\ \mathbf{v} \rangle - t\langle \mathbf{a},\ \mathbf{a} \rangle$ となるから、$t = \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ であることがわかる。 □



例 4 - 1 - 2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線を L とする。点 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ の L への正射影を $\mathbf{p}$ とすると、公式から

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{a},\ \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a},\ \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} = \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ □

[補題 4 - 1 - 1] と同様の方法で、次の補題を得る。

補題 4 - 1 - 3

$\mathbb{R}^n$ の原点を通る平面 H は直交するベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ によって張られているとする。このとき、$\mathbb{R}^n$ の点 $\mathbf{v}$ から H へ下ろした垂線の足 (の座標ベクトル) $\mathbf{p}$ は

(4 - 1 b) $$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{a},\ \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a},\ \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} + \frac{\langle \mathbf{b},\ \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{b},\ \mathbf{b} \rangle}\mathbf{b}$$

で与えられる。$\mathbf{p}$ を $\mathbf{v}$ の H への**正射影**と呼ぶ。

● 4-2：グラム-シュミットの直交化法

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の勝手に与えられた基底から正規直交基底を作り出すことができる。

$\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル $\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n$ に対して

(4-2 a) $\quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \iff$ "$\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n$" は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

であったことを思い出そう [系 2-5-2]。

まず、$\mathbb{R}^3$ の場合にその作り方を述べよう。

例 4-2-1 "$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$" を $\mathbb{R}^3$ の基底とする。このとき、$\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_3$ を以下のように定める。

(4-2 b)
$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1,$$

(4-2 c)
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1,$$

(4-2 d)
$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2.$$

$\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_3$ はいずれも零ベクトルでない、互いに直交する $\mathbb{R}^3$ のベクトルである。そこで、

(4-2 e)
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|},\ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|},\ \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|}$$

とおく。"$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$" は $\langle \mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たすから、$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である。$\mathbb{R}^3$ の基底 "$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$" から上記のようにして正規直交基底 "$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$" を作る方法を**グラム-シュミットの直交化法**と呼ぶ。 □

一般の場合にも同様にして、以下の結果が得られる。

定理 4-2-2

"$\mathbf{v}_1,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n$" を $\mathbb{R}^n$ の基底とする。このとき、$\mathbf{w}_1,\ \cdots,\ \mathbf{w}_n$ を以下のように帰納的に定める。

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1,$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{w}_{n-1},\ \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1},\ \mathbf{w}_{n-1} \rangle}\mathbf{w}_{n-1}.$$

最後に、

(4-2 f)
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|},\ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|},\ \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|},\ \cdots,\ \mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}$$

とおく。"$\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n$" は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。このような過程を経て正規直交基底を得ることを**グラム-シュミットの直交化法**という。

例 4-2-3　グラムシュミットの直交化法を用いて、次の $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\text{“}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{”}$$

を正規直交化して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作る。まず、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1, \\ \mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

とおいて、これらを計算して、

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る。各ベクトルを自身の長さで割って、

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。このようにして得られる組 “$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$” が “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” にグラム-シュミットの直交化法を施して得られる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である。 □

● 4-3：対称行列の直交行列による対角化

グラムーシュミットの直交化法を対称行列の対角化に応用しよう。

n 次実正方行列 A が (実数の範囲で) 対角化可能であるとは、

(4-3 a)
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる実数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots, \lambda_n$ と (成分が実数からなる) n 次正則行列 P が存在することをいう。次が成り立つ。

(4-3 b)　　A が対角化可能 $\iff$ A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底が存在する.

$\because$)

「$\Longleftarrow$」を示す。“$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$” を A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底とし、$A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする。$P = (\mathbf{p}_1\ \cdots\ \mathbf{p}_n)$ とおくと、P は [定理 1-4-3] より正則であり、$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, すなわち、(4-3 a) が成り立つ。よって、A は対角化可能である。逆が成り立つことは今の議論を逆にたどるとわかる。 □

いつでも行列を対角化できるとは限らないが、対称行列についてはこれがいつでも可能であることが知られている。すなわち、

定理 4 - 3 - 1

対称行列は直交行列によって実数の範囲内で対角化可能である。

上の定理には、対称行列の固有値はすべて実数であるという主張も含まれている。この定理は重要であるが、証明は少し複雑なので省略する (教科書の定理 7.16 を参照)。

例 4 - 3 - 2　対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化する 1 つの直交行列とそれによって得られる対角行列を求めよう。

まず、A の固有値と固有ベクトルを求める。A の固有多項式は $\varDelta_A(x) = (x-1)^2(x-4)$ と計算されるから、A の固有値は 1, 4 である。

- 固有値 1 に属する A の固有ベクトルは次で与えられる：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R},\ (s,t) \neq (0,0)).$$

- 固有値 4 に属する A の固有ベクトルは次で与えられる：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0).$$

いま、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、組 “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底である。これらのベクトルをグラム-シュミットの直交化法により正規直交化して、$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底

$$“\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}”$$

が得られる。$A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1,\ A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2,\ A\mathbf{u}_3 = 4\mathbf{u}_3$ であるから、“$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$” は A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である。したがって、

$$P = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと P は直交行列であり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ が満たされる。また、A^n が次のように求められる。

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{2+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} \\ \frac{-1+4^n}{3} & \frac{2+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} \\ \frac{-1+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} & \frac{2+4^n}{3} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

注意：一般に、対称行列 A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底 “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” をグラム-シュミットの直交化によって正規直交基底 “$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$” を作るとき、$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ はまた A の固有ベクトルであり、しかも、$\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{v}_i$ は同じ固有値に属する。

No.4 2024年10月17日

線形代数2事前練習用演習問題

pre4-1.(対称行列の直交行列による対角化)

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底を1組求めよ。

(3) (2) で求めた $\mathbb{R}^3$ の基底に対して、グラム-シュミットの直交化法を適用して、$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を 1 組求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ。また、そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre4-1. (1) A の固有多項式を計算すると

$$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 2 & -1 \\ 2 & x-7 & 2 \\ -1 & 2 & x-4 \end{vmatrix} \overset{\text{縦に足しあげる}}{=} \begin{vmatrix} x-3 & x-3 & x-3 \\ 2 & x-7 & 2 \\ -1 & 2 & x-4 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = (x-3)^2(x-9)$$

となる。したがって、A の固有値は $3, 9$ である。

(2) ● 固有値 3 に属する固有ベクトルを求める。

$$3E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots(\text{行基本変形の繰り返し})\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$x-2y+z=0$ を解く。$y=s,\ z=t\ (s,t \in \mathbb{R})$ とおくと、$x=2s-t$ となるから、連立一次方程式 $(3E_3-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s,t \in \mathbb{R})$$

である。このうち、$\mathbf{0}$ を除いたものが固有値 3 に属する A の固有ベクトルになる。そこで、固有値 3 に属する A の固有ベクトルの中から

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。“$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$” は一次独立である。

● 固有値 9 に属する固有ベクトルを求める。

$$9E_3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots(\text{行基本変形の繰り返し})\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、連立一次方程式

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \quad\ \ y+2z=0 \end{cases}$$

を解く。後退代入で解いて、$t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ を得る。このうち、$\mathbf{0}$ を除いたものが固有値 9 に属する A の固有ベクトルになる。そこで、固有値 3 に属する A の固有ベクトルの中から

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

を選ぶ。このとき、"$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$" は $\mathbb{R}^3$ の基底をなす。

(3) 上で求めた基底にグラム-シュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 "$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$" を作ると、次のようになる。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

(4) $P = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ とおくと、(3) よりこれは直交行列で、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}$ となる。

線形代数２・第４回 (2024 年 10 月 17 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第４回学習内容チェックシート 2024 年 10 月 17 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の $\boxed{\quad}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- L を $\mathbf{a}$ を方向ベクトル $\mathbb{R}^n$ に持つ原点を通る直線とする。このとき、$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ の L への正射影 $\mathbf{p}$ は、$\mathbf{p} = \boxed{\quad}\,\mathbf{a}$ で与えられる。この公式は、方程式 $\boxed{\quad} = 0$ を $\mathbf{p} = t\mathbf{a}$ $(t \in \mathbb{R})$ とおいて t に関して解くと求められる。
- H を直交するベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって張られている $\mathbb{R}^n$ の原点を通る平面とする。このとき、$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ の H への正射影 $\mathbf{p}$ は、$\mathbf{p} = \boxed{\quad}\,\mathbf{a} + \boxed{\quad}\,\mathbf{b}$ で与えられる。この公式は、方程式 $\boxed{\quad} = 0$, $\boxed{\quad} = 0$ を $\mathbf{p} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ とおいて s, t に関して解くと求められる。

Q2. グラム-シュミットの直交化法を用いると、$\mathbb{R}^3$ の任意の基底 “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” から正規直交基底 “$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$” を作り出すことができる。下のフロー・チャートはその手順を示している。中央と右の枠内を適切な式で埋めて、このチャートを完成させなさい。

$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$	$\xrightarrow{\text{直交化}}$		$\xrightarrow{\text{正規化}}$	$\mathbf{u}_1 =$ $\mathbf{u}_2 =$ $\mathbf{u}_3 =$

Q3. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
n 次正方行列 A が (実数の範囲内で) 対角化可能であるとは？	p.	

Q4. 次は 3 次対称行列 A を直交行列によって対角化するための手順を示している。$\boxed{\quad}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

Step 1. A の $\boxed{\quad}$ と、それに属する A の $\boxed{\quad}$ を求める。

Step 2. A の $\boxed{\quad}$ からなる $\mathbb{R}^3$ の基底 “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” を 1 組選ぶ。

Step 3. $\boxed{\quad}$ 法を用いて、$\mathbb{R}^3$ の基底 “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” から $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 “$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$” を作る。

Step 4. $P = \boxed{\quad}$ と定めると P は直交行列であり、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ と表わされる。ここで、λ_i $(i = 1, 2, 3)$ は $\boxed{\quad}$ が属する A の $\boxed{\quad}$ に等しい。

Q5. 第 4 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。