

§4. グラム-シュミットの直交化法と直交補空間

最初に、グラム-シュミットの直交化法を紹介する。グラム-シュミットの直交化法は、有限次元計量空間 V の勝手な基底から正規直交基底を作るためのアルゴリズムである。次に、 V の任意の部分空間 W に対して、直交補空間と呼ばれる部分空間 $W^\perp$ が定まり、 V は W と $W^\perp$ の直和に分解されることを示す。この直和分解の証明にグラム-シュミットの直交化法を用いる。この節を通じて、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。

● 4-1 : グラム-シュミットの直交化法

n 次元計量空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の n 個のベクトル $v_1, \dots, v_n$ に対して

(4-1 a) $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, n) \iff “v_1, \dots, v_n”$ は V の正規直交基底であったことを思い出そう [系 3-2-3]。

定理 4-1-1 (グラム-シュミットの直交化法)

“ $v_1, \dots, v_n$ ” を計量空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の基底とする。このとき、 $w_1, \dots, w_n$ を以下のように帰納的に定める。

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2, \\ &\dots\dots\dots \\ w_n &= v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}. \end{aligned}$$

$w_1, \dots, w_n$ はいずれも零ベクトルでない、互いに直交する V のベクトルである。そこで、

$$(4-1 b) \quad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}, \quad \dots, \quad u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

とおく。“ $u_1, \dots, u_n$ ” は $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ を満たすから、 V の正規直交基底である。このような過程を経て正規直交基底を得ることを**グラム-シュミットの直交化法**という。

上の定理は [補題 3-3-1] から容易に示すことができるので、証明は省略する。

例 4-1-2 グラム-シュミットの直交化法を用いて、 $\mathbb{C}^3$ の基底

$$“\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}”$$

を正規直交化しよう。まず、 $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$ の階数は計算により $\text{rank} A = 3$ と求められるから、“ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ” は確かに $\mathbb{C}^3$ の基底であることがわかる。次に、公式に当てはめて計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

となるので、グラム-シュミットの直交化法によって“ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ”を正規直交化して得られる $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底は次のようになる：

$$“\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1+i \end{pmatrix}.” \quad \square$$

● 4-2 : (内部) 直和

ここで、ベクトル空間における直和の概念を説明する。直和は線形代数 4 で詳しく扱われるが、次の第 4-3 節で説明する計量空間における直交補空間の理解に必要であり、後の節においても時々必要になるので、手短に定義とその意味と性質を述べる。直和の定義に内積は用いない。

定義 4-2-1

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間、 $W_1, \dots, W_l$ をその部分空間とする。このとき、

$$(4-2 \text{ a}) \quad W_1 + \dots + W_l := \{ w_1 + \dots + w_l \mid w_1 \in W_1, \dots, w_l \in W_l \}$$

は V の部分空間である。この部分空間を $W_1, \dots, W_l$ の**和空間**と呼ぶ。

この和空間の任意の元が $w_1 + \dots + w_l$ ($w_i \in W_i, i = 1, \dots, l$) の形に一意的に表わされる
とき、 $W_1, \dots, W_l$ は V の中で**直和**であるといい、和空間 $W_1 + \dots + W_l$ を $W_1 \oplus \dots \oplus W_l$
で表わす。

$W_1, \dots, W_l$ が V の中で直和であることは、

$$(4-2 \text{ b}) \quad \begin{aligned} & \text{「} w_1 \in W_1, \dots, w_l \in W_l \text{ が } w_1 + \dots + w_l = 0_V \text{ を満たすならば、} \\ & \text{すべての } i = 1, \dots, l \text{ について } w_i = 0_V \text{ である」} \end{aligned}$$

が成り立つことと同値である。 $l = 2$ のときには、次の言い換えも成り立つ：

$$(4-2 \text{ c}) \quad W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = \{0_V\}.$$

例 4-2-2 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

を考える。 $\mathbb{R}^2$ の中で、 W, U_1 は直和であり、 W, U_2 も直和である。さらに、 $W + U_i = \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2$) であるから、 $\mathbb{R}^2 = W \oplus U_1 = W \oplus U_2$ と表わされる。

(証明)

W, U_1 が直和であることを示す。 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u}_1 \in U_1$ をとり、 $\mathbf{w} + \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ とおく。 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u}_1 \in U_1$ より $\mathbf{w} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbb{R}$) と書くことができる。これらを $\mathbf{w} + \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ に代入して成分比較することにより、 $s + t = 0, s = 0$ を得る。これを解くと $s = t = 0$ であるから、 $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ である。よって、 W, U_1 は $\mathbb{R}^2$ において直和である。

“ $\mathbf{v}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ” は $\mathbb{R}^2$ の基底であるから、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ は $\mathbf{x} = s\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1$ ($s, t \in \mathbb{R}$) と表わされる。したがって、 $\mathbb{R}^2 = W + U_1 = W \oplus U_1$ である。

W, U_2 についても同様に示される。

□

上の例と同様に次が示される。

例 4-2-3 V を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。“ $v_1, \dots, v_n$ ” を V の基底とする。このとき、 $W_i = \{tv_i \mid t \in \mathbb{K}\}$ ($i = 1, \dots, n$) とおくと、 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ が成り立つ。

直和の定義とその言い換え (4-2 b) から、直和の概念は基底の概念の一般化と考えられる。この観点から次の定理は自然に理解できる。

定理 4-2-4

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間、 $W_1, \dots, W_l$ をその部分空間とする。

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_l$$

のとき、各 W_i ($i = 1, \dots, l$) から基底 $\mathcal{B}_i$ を 1 組とり、これらを並べて V のベクトルの組 $\mathcal{B}$ を作ると、これは V の基底となる。したがって、次元に関して次の等式が成り立つ：

$$(4-2 d) \quad \dim V = \dim W_1 + \dots + \dim W_l.$$

● 4-3 : 直交補空間

計量空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の中に部分空間 W が与えられると、 W の中のどのベクトルにも直交するような V のベクトルからなる集合を考えることができる。これを $W^\perp$ で表わす：

$$(4-3 a) \quad W^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0\}.$$

これは V の部分空間をなす (証明は演習問題とする)。 $W^\perp$ を W の**直交補空間**と呼ぶ。

例 4-3-1 $\mathbb{R}^3$ において、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルに持つ原点を通る直線 $L = \{t\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ を考える。このとき、

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

である。これは、 $\mathbf{a}$ を法線ベクトルとする原点を通る平面である。

直接の計算により $\mathbb{R}^3 = L \oplus L^\perp$ とわかるが、次の [定理 4-3-2(1)] から直ちに従う。□

定理 4-3-2

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間とする。 V の部分空間 W に対して次が成り立つ。

$$(1) V = W \oplus W^\perp.$$

$$(2) (W^\perp)^\perp = W.$$

(証明)

(1) まず、 W と $W^\perp$ が V の中で直和であることを示す。 $w \in W \cap W^\perp$ とする。 $w \in W^\perp$ であるから、任意の $x \in W$ に対して $\langle w, x \rangle = 0$ が満たされる。 $w \in W$ であるから、特に、 $\langle w, w \rangle = 0$ となる。これは $w = 0_V$ を意味する。故に、 $W \cap W^\perp = \{0_V\}$ である。

次に、 $V = W + W^\perp$ を示す。 $W = \{0_V\}$ のときには、

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0\} = V$$

となり、 $V = W + W^\perp$ は満たされる。以下、 $W \neq \{0_V\}$ とし、 W の正規直交基底 “ $w_1, \dots, w_k$ ” を1つ取る (注: W の基底 “ $v_1, \dots, v_k$ ” を1つ取り、これに対してグラム-シュミットの直交化法を適用することにより、 W の正規直交基底が得られる)。

さて、任意に $v \in V$ を取る。このとき、

$$u := v - \langle v, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v, w_k \rangle w_k$$

とおく。任意の $i = 1, \dots, k$ に対して $\langle u, w_i \rangle = 0$ であるから、 $u \in W^\perp$ であることがわかる。さらに、

$$v = (\langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k) + u$$

と書くことができるから、 $v \in W + W^\perp$ であることがわかる。こうして、 $W \neq \{0_V\}$ のときにも $V = W + W^\perp$ が示された。

(2) (1) の等式を W が $W^\perp$ の場合に適用して $V = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp$ が得られる。したがって、

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V = \dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp$$

より、 $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$ であることがわかる。一方、直交補空間の定義より、 $W \subset (W^\perp)^\perp$ が成り立つ (各自で確かめよ)。よって、 $W = (W^\perp)^\perp$ が成立する (下の注意2を参照)。□

注意 1. ベクトル空間 V の部分空間 W に対して、その補空間、すなわち、 $V = W \oplus U$ となる部分空間 U はいくつも存在する ([例 4-2-2] を参照) が、 V に計量が与えられていると、(1) によりこのような U の中から「標準的な」補空間を選ぶことができる。

注意 2. ベクトル空間 V の有限次元部分空間 U, W について、 $W \subset U$, $\dim W = \dim U$ であれば、 $W = U$ が成り立つ。この事実は線形代数4で証明する。

● 4-4 : 最良近似としての正射影

W を有限次元計量空間 V の部分空間とする。 $v \in V$ を任意にとると、[定理 4-3-2(1)] により、 $v = p + u$ ($p \in W$, $u \in W^\perp$) のように一意的に表わすことができる。このとき、 $v - p = u \in W^\perp$ であるから、 p は v の W への正射影である。この p は W に正規直交基底 “ $u_1, \dots, u_k$ ” が与えられれば、[補題 3-3-1(2)] により、 $p = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$ により与えられる。

次の定理から、 v を W の元で近似しようとするとき、 v の W への正射影 p は最も誤差が小さいベクトルであることがわかる。

定理 4-4-1

($V, \langle \cdot, \cdot \rangle$) を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間とし、 W をその部分空間とする。このとき、任意の $v \in V$ に対して W への正射影 $p \in W$ は v の W 上のベクトルによる最良近似ベクトルである。すなわち、

$$w \in W, w \neq p \implies \|v - p\| < \|v - w\|.$$

(証明)

任意の $w \in W$ に対して

$$v - w = (v - p) + (p - w)$$

が成り立つ。 $p - w \in W$, $v - p \in W^\perp$ であるから、 $p - w$ と $v - p$ は直交する。したがって、

$$\|v - w\|^2 = \|v - p\|^2 + \|p - w\|^2$$

が成り立つ (計量空間におけるピタゴラスの定理)。 $w \neq p$ ならば、 $\|p - w\|^2 > 0$ であるから、 $\|v - w\|^2 > \|v - p\|^2$, すなわち、 $\|v - w\| > \|v - p\|$ を得る。□

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre4-1. $V = \mathbb{R}[x]_2$ を高々 2 次の実数係数多項式のなすベクトル空間とする。 $f(x), g(x) \in V$ に対して $\langle f(x), g(x) \rangle$ を

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

によって定義する。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V 上の内積となる。

(1) V の基底 “ $1, x, x^2$ ” にグラム-シュミットの直交化法を適用して、 V の正規直交基底を作れ。このようにして作られる多項式は**ルジャンドルの多項式**と呼ばれる。

(2) $2 + 3x + x^2 \in V$ を (1) で求めた V の正規直交基底の一次結合で表わせ。

pre4-2. $\omega \in \mathbb{C}$ を $\omega^3 = 1$ かつ $\omega \neq 1$ を満たすものとする。 $M_2(\mathbb{C})$ を

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^* A) \quad (A, B \in M_2(\mathbb{C}))$$

により定義されるエルミート内積を持つエルミート計量空間とみなす。 $M_2(\mathbb{C})$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a + \omega b + \omega^2 c = 0 \right\}$$

を考える。 W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre4-1. (2) は [補題 3-2-5] を用いる。

(1) グラム-シュミットの直交化法に従い、

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x, \quad g_3(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

とくと、これらは互いに直交する多項式となる。各多項式を正規化することにより、 $\mathbb{R}[x]_2$ の正規直交基底 “ $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ ” が得られる。

(2) 上で求めた正規直交基底を順に、 $\ell_0(x), \ell_1(x), \ell_2(x)$ とおく。

$$\langle 2 + 3x + x^2, \ell_0(x) \rangle = \frac{14}{3\sqrt{2}}, \quad \langle 2 + 3x + x^2, \ell_1(x) \rangle = 2\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \langle 2 + 3x + x^2, \ell_2(x) \rangle = \frac{4}{15}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

より、 $2 + 3x + x^2$ は (1) で求めた正規直交基底 “ $\ell_0(x), \ell_1(x), \ell_2(x)$ ” に関して次のように表わされる：

$$2 + 3x + x^2 = \frac{14}{3\sqrt{2}}\ell_0(x) + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\ell_1(x) + \frac{4}{15}\sqrt{\frac{5}{2}}\ell_2(x).$$

pre4-2. W は “ $E_1 = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ” を基底に持つことがわかる。 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ について $\langle X, E_1 \rangle = -\omega^2 x + y, \langle X, E_2 \rangle = -\omega x + z, \langle X, E_3 \rangle = w$ であるから、

$$X \in W^\perp \iff \langle X, E_1 \rangle = \langle X, E_2 \rangle = \langle X, E_3 \rangle = 0 \iff y = \omega^2 x, z = \omega x, w = 0$$

である。したがって、 $W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & \omega^2 x \\ \omega x & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid x \in \mathbb{C} \right\}$ である。

第4回(2025年4月28日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の3次元計量空間とし、“ v_1, v_2, v_3 ” を V の基底とする。

グラム-シュミットの直交化法を適用して、基底“ v_1, v_2, v_3 ” から V の正規直交基底“ u_1, u_2, u_3 ”を得る手続きを説明せよ。

Q2. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、 U, W をその部分空間とする。

(1) U, W が V の中で直和であるとは、どのような条件が成り立つときをいうか？その定義を書け。

(2) U, W が V の中で直和であることは、どんな条件が成り立つことと同値か？その条件を1つ挙げよ。

(3) U, W が V の中で直和であるとき、 $U \oplus W$ はどのような V の部分集合で、次元はどうか。

$$U \oplus W = \underline{\hspace{10em}}, \quad \dim(U \oplus W) = \underline{\hspace{10em}}$$

Q3. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の計量空間、 W をその部分空間とする。

(1) W の直交補空間 $W^\perp$ の定義を書け。

$$W^\perp = \underline{\hspace{10em}}$$

(2) V が有限次元であるとき、 $v \in V$ の W への正射影 p はどのようにして求めることができるか？

(3) V は有限次元であるとし、 $v \in V$ の W への正射影を p とおく。任意の $w \in W, w \neq p$ に対して $\|v - p\|$ と $\|v - w\|$ の間にどのような不等式が成立するかを書き、その不等式の意味を説明せよ。

Q4. 第4回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。