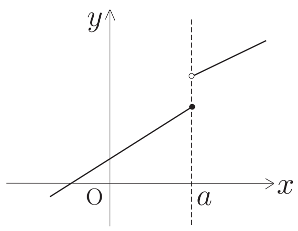
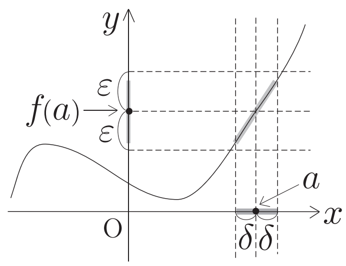
§4. 関数の連続性

この節では、連続関数の概念が導入される。関数の連続性と四則演算や合成との関係を、例を挙げながら説明する。次に、閉区間上で定義された連続関数に関する最も重要な定理—中間値の定理—を述べ、その応用 (n 乗根の存在定理と 3 次方程式の実数解の存在定理) を紹介する。

● 4 - 1 : 連続とは

右図のグラフを持つ関数について考える。この関数は、点 a において値がジャンプしているので、連続ではない。しかし、a 以外の点では、その近くでグラフは‘切れ目なく繋がっている’ので、a 以外の点では連続と言える。つまり、一点 a で連続でないために、右図のようなグラフを持つ関数は連続ではない。逆に言えば、関数がどのような点においても連続であれば、その関数自体が連続であると言える。





そこで、関数 $f(x)$ がその定義域内の点 a で連続であるとはどういうことなのかを考察する。$f(x)$ をある集合 S 上で定義されている関数とし、$a \in S$ とする (極限のときとは異なり、今度は $f(a)$ が定まっている)。このとき、f が点 a で連続である (繋がっている) ということを、「x が a に近ければ近いほど、$f(x)$ は $f(a)$ の近くにある」ことであると解釈しよう。すると、関数 $f(x)$ が**点 a で連続**であるということを、S の要素からなる、a に収束するどんな数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束することと定義するのが妥当であるとわかる。$f(x)$ がその定義域 S 内のすべての点で連続なとき、関数 $f(x)$ は**連続**であるという。

定義から、a が S の集積点であるとき、

(4 - 1 a) $$\text{関数 } f(x) \text{ が } a \text{ で連続} \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ。

例 4 - 1 - 1 実数 c への定数関数 $\underline{c}(x) = c \quad (x \in \mathbb{R})$ は連続である。

例 4 - 1 - 2 (1) $f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ は連続である。

(2) 余弦関数 $\cos x$ ($x \in \mathbb{R}$), 正弦関数 $\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) は連続である。

(証明)

(1) については証明を略す。(2) の余弦関数が $a \in \mathbb{R}$ において連続であることを示す。

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を a に収束する数列とすると、n が十分大きいとき $\left|\dfrac{x_n - a}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$ となり、このとき、$\left|\sin \dfrac{x_n - a}{2}\right| \leq \left|\dfrac{x_n - a}{2}\right|$ となる。故に、

$$|\cos x_n - \cos a| = \left|-2 \sin \frac{x_n + a}{2} \sin \frac{x_n - a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x_n - a}{2}\right| = |x_n - a|$$

を得る。よって、$\{\cos x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\cos a$ に収束する。よって、余弦関数 $\cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) は a において連続である。

正弦関数が連続であることも同様に示される。 □

● 4 - 2 : 連続関数の和差積商とその連続性

[補題 3 - 3 - 1] の証明と同様の方法で、次が成り立つことがわかる：

定理 4 - 2 - 1

定義域が同じ集合 S であるような 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が $a \in S$ で連続ならば、関数 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ も a で連続である。特に、実数 c に対して、$f(x)$ の c 倍 $cf(x)$ も点 a で連続になる。

例 4 - 2 - 2 (1) $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ を定数とする。多項式関数

(4 - 2 a) $$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

は連続である。実際、

① 定数関数 $\underline{a_0}(x) = a_0$ $(x \in \mathbb{R})$ は連続である。

② 関数 $f_1(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ は連続である。

②および連続関数の積は連続であるから、関数 $f_2(x) = x^2, \ \cdots, f_n(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ はすべて連続であり、連続関数の定数倍も連続であるから、関数

$$g_1(x) = a_1 x, \ g_2(x) = a_2 x^2, \cdots, g_n(x) = a_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

はすべて連続である。最後に、連続関数の和は連続であるから、(4 - 2 a) によって与えられる多項式関数 f は連続なことがわかる。

(2) 正接関数 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots))$ は、連続関数の商として、連続である。

● 4 - 3 : 合成関数の連続性

連続関数の合成は連続である。詳しくは次が成り立つ。

定理 4 - 3 - 1

S_1 上で定義された関数 $f(x)$ と S_2 上で定義された関数 $g(y)$ が合成可能であるとする。関数 $f(x)$ が点 $a \in S_1$ で連続であり、$g(y)$ が点 $f(a)$ で連続ならば、合成関数 $(g \circ f)(x)$ は点 a で連続である。

(証明)

S_1 の要素からなる $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとると、関数 $f(x)$ $(x \in S_1)$ が点 $a \in S_1$ で連続なので、$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が成り立つ。$y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと、数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S_2 の要素からなり、$\lim_{n\to\infty} y_n = f(a)$ を満たす。関数 $g(y)$ $(y \in S_2)$ は点 $f(a)$ で連続なので、$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(a))$ が成り立つ。これは $\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$ と書き換えられる。よって、合成関数 $(g \circ f)(x)$ は点 a で連続である。 □

例 4 - 3 - 2 関数

$$h(x) = \sin\Bigl(\frac{x-3}{2x+1}\Bigr) \qquad \Bigl(x \neq -\frac{1}{2}\Bigr)$$

は、２つの関数

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1} \quad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right) \quad \text{と} \quad g(y) = \sin y \quad (y \in \mathbb{R})$$

との合成関数に等しい。関数 $g(y)$ は連続である。また、関数 $f(x)$ は２つの連続関数

$$f_1(x) = x - 3, \quad f_2(x) = 2x + 1 \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

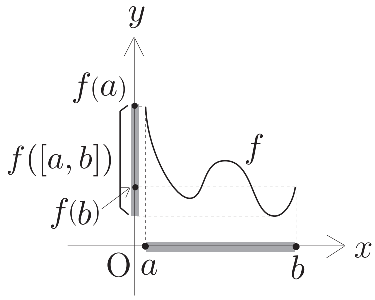
の商であるから、連続である。したがって、$h(x) = (g \circ f)(x)$ も連続である。 □

● 4 - 4 : 中間値の定理

$a < b$ を満たす実数 a, b に対して、

(4 - 4 a) $$[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$$

を a, b を端点とする**閉区間**という。



中間値の定理は、「閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ の間の値をすべて取る」ということを主張する定理である。正確に述べると次のようになる。

定理 4 - 4 - 1 (中間値の定理)

$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数とする。

(1) $f(a) < f(b)$ のとき、$f(a) < \gamma < f(b)$ を満たす任意の実数 γ に対して、$f(c) = \gamma$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する。

(2) $f(b) < f(a)$ のとき、$f(b) < \gamma < f(a)$ を満たす任意の実数 γ に対して、$f(c) = \gamma$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する。

中間値の定理の証明は実数の定義に関わるので、証明を略す。

中間値の定理を使って、次の 2 つのことが示される。

(1) 0 以上の任意の実数 a に対して n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ が存在する ([補題 4 - 5 - 1])。

(2) 実数係数の 3 次方程式は少なくとも 1 つの実数解をもつ ([例 4 - 6 - 1])。

以下、順にこの事実を導く。

● 4 - 5 : 中間値の定理の応用１：n 乗根の存在

ここでは、n 乗根が存在することを示す。

補題 4 - 5 - 1

n を自然数とし、a を 0 以上の実数とする。このとき、$x^n = a$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。この x を $a^{\frac{1}{n}}$ または $\sqrt[n]{a}$ と書き、a の n **乗根**という。a の平方根 $\sqrt{a}$ とは a の 2 乗根 $a^{\frac{1}{2}}$ $(= \sqrt[2]{a})$ のことである。

(証明)

関数 $f(x) = x^n$ $(x \geq 0)$ を考える。$N > a$ となるくらい、自然数 N を十分大きくとる。すると、$f(N) = N^n \geq N > a \geq 0 = f(0)$ となる。$f(x)$ は閉区間 $[0, N]$ において連続なので、中間値の定理により、$f(x_0) = a$ となる $x_0 \in [0, N]$ が存在する。

次に $f(x) = a$ となる $x \geq 0$ がただ一つしかないことを示そう。$x_1 \geq 0$ も $f(x_1) = a$ であったとする。すると、$x_1^n = x_0^n$ となる。

$$x_1 < x_0 \quad (\text{resp. } x_0 < x_1) \quad \Longrightarrow \quad x_1^n < x_0^n \quad (\text{resp. } x_0^n < x_1^n)$$

であるから、$x_1 \neq x_0$ ならば $x_1^n \neq x_0^n$ となる。したがって、$x_1^n = x_0^n$ となるのは $x_1 = x_0$ のときだけである。こうして、でなければならない。すなわち、$f(x) = a$ となる $x \geq 0$ は x_0 のみであることが示された。 □

● 4 - 6 : 中間値の定理の応用 2：奇数次実数係数方程式の実数解の存在

中間値の定理により、どのような 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c は実定数) も実数解を持つことが示される (c.f. 実係数の 2 次方程式は必ずしも実数解をもたなかったことと比較しよう)。

例 4 - 6 - 1 実係数の 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は少なくとも 1 つの実数解を持つ。

(**証明**)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbb{R}$) とおくと、$x \neq 0$ のとき、

$$f(x) = x^3\Big(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\Big)$$

と書ける。$|x|$ が大きければ大きいほど $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3}$ はいくらでも小さくなるから、自然数 N を十分大きくとれば、

$$|x| \geq N \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} < \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ。したがって、

$$f(-N) = -N^3\Big(1 + \frac{a}{N} + \frac{b}{N^2} + \frac{c}{N^3}\Big) < -\frac{N^3}{2} < 0,$$

$$f(N) = N^3\Big(1 + \frac{a}{N} + \frac{b}{N^2} + \frac{c}{N^3}\Big) > \frac{N^3}{2} > 0$$

となる。$f(x)$ は閉区間 $[-N, N]$ で連続であるから、中間値の定理により、$f(-N)$ と $f(N)$ の間の値 0 に対して、$f(c) = 0$ となる実数 c が $[-N, N]$ の中に存在する。この c は与えられた 3 次方程式の (1 つの) 実数解である。 □

一般に、次が成り立つ。

例 4 - 6 - 2 n を自然数、$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ とする。n が奇数ならば、n 次方程式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

は必ず実数解を持つ。すなわち、$f(x_0) = 0$ となる $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在する。

2026 年 4 月 30 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 4 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
$\mathbb{R}$ の部分集合 S 上で定義された関数 $f(x)$ が点 $a \in S$ で連続であるとは？	p.	
関数 $f(x)$ $(x \in S)$ が連続であるとは？	p.	
閉区間 $[a,b]$ とは？	p.	
0 以上の実数 a の n 乗根 $a^{\frac{1}{n}}$ とは？	p.	

Q2. (1) 2 つの関数の和差積商とそれらの連続性について、どんな結果が成り立ちますか。

(2) 合成可能な 2 つの関数の合成とそれらの連続性について、どんな結果が成り立ちますか。

Q3. 次の各関数 f_1, f_2, f_3 は連続であるか否かを判定しなさい。さらに、連続でないものについては、どの点で不連続となるのかを書きなさい。

	連続か否かの判定と不連続点
$f_1(x) = \sin\dfrac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$	
$f_2(x) = \begin{cases} \lvert x\rvert & (-1 < x < 1) \\ 2 - x & (\lvert x\rvert \geq 1) \end{cases}$	
$f_3(x) = x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$	

Q4. (1) 中間値の定理とはどんな定理ですか？それが意味する内容を説明しなさい。

(2) 中間値の定理を用いることにより導かれる結果を 2 つ挙げなさい。

-
-

Q5. 第 4 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。