

§4. 2変数関数の極限と連続性

この節以降、2変数関数の微積分を学ぶ。そのための準備として、まず、2変数関数のグラフ、平面の2点間の距離、収束などの概念を説明する。次に、2変数関数の極限と連続性について概観する。

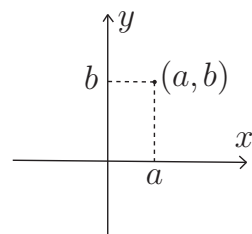
● 4-1：平面 $\mathbb{R}^2$

2つの実数の組 (a, b) 全体からなる集合を $\mathbb{R}^2$ によって表わす。幾何学的には $\mathbb{R}^2$ は平面を表わしていると考えられる。このため、 $\mathbb{R}^2$ の要素 (a, b) を点と呼ぶことが多い。

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $a \neq c$ あるいは $b \neq d$ であれば、 $(a, b), (c, d)$ は平面上の異なる2点を表わすから、

$$(4-1 \text{ a}) \quad (a, b) \neq (c, d) \iff a \neq c \text{ または } b \neq d$$

が成立する。



● 4-2：2変数関数

D を $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合とする。 D 中の点 (x, y) を入力すると、ひとつの実数を入力する「装置」を D 上で定義された(2変数)関数と呼ぶ。この装置 f は、 D 中の各点 (x, y) に実数 $f(x, y)$ をひとつずつ対応させる規則として理解することができる。

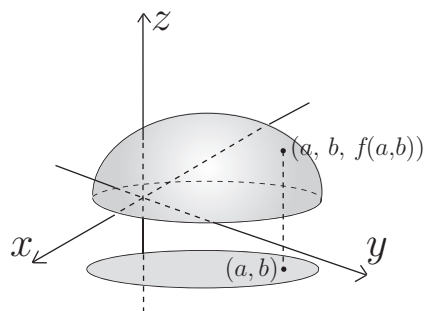
例 4-2-1 単位円の内部および周 $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ の各点 (x, y) に対して、実数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ を対応させる規則 f は D 上の関数を定義する。これを $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in D)$ または $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$ のように書き表わす。

● 4-3：2変数関数のグラフ

D 上で定義された2変数関数 $f(x, y)$ の様子は、 (x, y, z) -座標空間内に**グラフ**

$$\{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \}$$

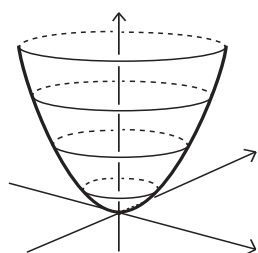
を描くことによりある程度知ることができる。一般に、関数 $f(x, y)$ のグラフは、 (x, y, z) -座標空間において、曲面を描く。



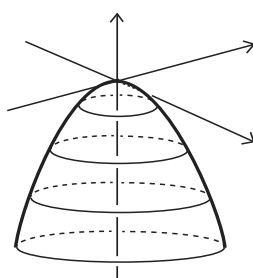
例 4-3-1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) = -x^2 - y^2, \quad f_3(x, y) = x^2 - y^2$$

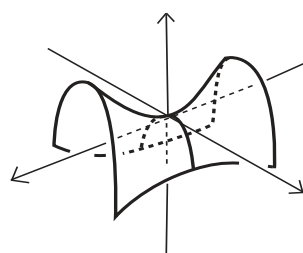
のグラフはそれぞれ次の図のようになる：



f_1



f_2



f_3

これらのグラフを描くには、

- 実数 k を固定して平面 $z = k$ によるグラフの切り口がどんな形かを調べ、
- その後で、 k を動かすことにより全体像をつかむとよい。

平面 $z = k$ によるグラフの切り口がわかりにくい場合には、平面 $x = k$ による切り口を考えたり、 $y = k$ による切り口を考えたりするとわかる場合もある。

● 4-4 : $\mathbb{R}^2$ における ε -近傍と点列の収束

$\mathbb{R}^2$ 内の2点 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ に対して、

$$(4-4 \text{ a}) \quad \overline{PQ} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

を P, Q 間の距離という。

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点 (a, b) に対して、 (a, b) からの距離が ε (> 0) より小さい点全体のなす集合

$$(4-4 \text{ b}) \quad U_\varepsilon(a, b) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \}$$

を (a, b) の ε -近傍と呼ぶ。 $U_\varepsilon(a, b)$ は (a, b) を中心とする半径 ε の円の内部を表わしている。

$\mathbb{R}^2$ 内の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ が点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に収束するとは、2点 $(x_n, y_n), (a, b)$ 間の距離が、 $n \rightarrow \infty$ のとき、0 に収束するとき、すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = 0$$

となるときをいう。

● 4-5 : 2変数関数の極限

点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ が $D \subset \mathbb{R}^2$ の集積点であるとは、次の条件が満たされるときをいう。

$$(4-5 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{どんなに小さい } \varepsilon > 0 \text{ に対しても、} U_\varepsilon(a, b) \\ \text{の中に } D \text{ に属する } (a, b) \text{ 以外の点が存在する。} \end{array} \right.$$

$f(x, y)$ を $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数とし、点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を D の集積点とする。 (a, b) に収束するような、 D 内の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ (但し、 $(x_n, y_n) \neq (a, b)$) の選び方によらずに、数列 $\{f(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ が一定値 α に収束するとき、その実数 α を、 (x, y) を (a, b) に近づけたときの $f(x, y)$ の極限といい、

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \alpha$$

により表わす。

例 4-5-1 関数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) について、極限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ が存在するかどうかを調べよ。

解；

まず、 (x, y) を y 軸に沿って $(0, 0)$ に近づけていく場合を考える。この場合の極限は

$$f(0, y) = \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0)$$

である。次に、 (x, y) を傾き m の直線 $y = mx$ に沿って $(0, 0)$ に近づけていく場合を考える。この場合の極限は

$$f(x, mx) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} \rightarrow \frac{m}{1 + m^2} \quad (x \rightarrow 0)$$

である。特に、 $m = 1$ にとれば、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$ である。したがって、

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=x}} f(x, y)$$

がわかる。これは、 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ が定まらないことを意味する。 □

● 4-6：2変数関数の連続性

最初に1変数関数が連続であることの定義を思い出そう。 $\mathbb{R}$ の部分集合 S 上で定義された関数 $f(x)$ ($x \in S$) を考える。この関数 $f(x)$ が点 $a \in S$ で連続であるとは、 a に収束する S 内のどんな数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても、数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束するときをいう。これは「 x が a に近ければ近いほど、 $f(x)$ は $f(a)$ の近くにある」ことを数列の極限を用いて表現したものであって、関数のグラフが点 $(a, f(a))$ において「繋がっている」ことを意味している。

a が S の集積点であるとき、

$$(4-6 a) \quad \text{関数 } f(x) \text{ が } a \text{ において連続} \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ。

2変数関数の連続性も1変数のときと同様に定義される。 $f(x, y)$ を $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数とする。関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) が点 $(a, b) \in D$ において連続であるとは、 (a, b) に収束する D 内のどんな点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても、数列 $\{f(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a, b)$ に収束するときをいう。すべての点 $(x, y) \in D$ で連続であるとき、 f は D 上で連続、あるいは単に連続であるという。

(a, b) が D の集積点であるとき、

$$(4-6 b) \quad \text{関数 } f(x, y) \text{ が点 } (a, b) \in D \text{ において連続} \iff \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つ。

例 4-6-1 関数

$$(4-6 c) \quad p(x, y) = x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

は連続である。実際、任意の $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 (a, b) に収束するような任意の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ をとると、

$$|p(x_n, y_n) - p(a, b)| = |x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。これは $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y_n) = p(a, b)$ を意味する。したがって、関数 $p(x, y)$ は任意の点 (a, b) で連続である。

同様にして、関数 $q(x, y) = y$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) は連続であることがわかる。□

1変数関数の極限の場合と同様に、 D 上の関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ が $(a, b) \in D$ で連続ならば、4つの関数

$$f(x, y) + g(x, y), \quad f(x, y) - g(x, y), \quad f(x, y)g(x, y), \quad \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

も (a, b) で連続である。但し、4番目の商についてはすべての $(x, y) \in D$ について $g(x, y) \neq 0$ を仮定する。

例 4-6-2 関数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) は、連続関数

$$p(x, y) = x, \quad q(x, y) = y \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

の積、和、商として表されるので、連続である。このことから、例えば、 $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ としたときの極限が

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = f(1, 2) = \frac{1 \cdot 2}{1^2 + 2^2} = \frac{2}{5}$$

のように計算できる。□

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 4 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q1. $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$f_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x,y) = -x^2 - y^2, \quad f_3(x,y) = x^2 - y^2$

のグラフの概形をそれぞれ下の枠の中に描きなさい (座標軸は描かなくてよい)。

$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$

Q2. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ の ε -近傍とは？	p.	
$\mathbb{R}^2$ 内の点列 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^\infty$ が (a,b) に収束するとは？	p.	
(a,b) が $D \subset \mathbb{R}^2$ の集積点であるとき、 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ について $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ の定義は？	p.	
$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で連続であるとは？	p.	
$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ が連続であるとは？	p.	

Q3. 関数 $p(x,y) = x, q(x,y) = y, \mathbb{1}(x,y) = 1 ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ と、連続関数の和差積商が連続であるという事実を用いて、関数

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + 1} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

が連続である理由を下の枠内に書きなさい。

Q4. 第 4 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。