§5. 数ベクトル空間の部分空間

ここでは、数ベクトル空間における部分空間の概念を導入する。第１節では数ベクトル空間に対して基底を考えたが、部分空間に対しても同様の概念が定義される。特に、定数項ベクトルが零ベクトルであるような連立一次方程式の解全体のなす部分空間、および、その基底について考察する。この場合の基底は連立一次方程式の基本解と同じものであるが、この節では、それを連立一次方程式の解空間の基底として捉えることに力点をおく。

● 5-1：連立一次方程式の解空間

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解はガウスの消去法 (掃き出し法) を使ってすべて求めることができる。しかしながら、ここでは、「解を求める」ことではなく、「解全体が満たす性質」に焦点を当てよう。

(m, n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を考える。この連立一次方程式の実数解全体からなる集合を W とおく：

(5-1 a)
$$W = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{w} = \mathbf{0} \}.$$

W を連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間と呼ぶ。W は次の性質 (零ベクトルを含み、和とスカラー倍に関して閉じているという性質) を持つことがわかる。

補題 5-1-1

(SS0) 零ベクトル $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ は連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解である。すなわち、
$$\mathbf{0} \in W.$$

(SS1) $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^n$ が連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解ならば、和 $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$ も解である。すなわち、
$$\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W \implies \mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W.$$

(SS2) $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ が連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解ならば、任意の $t \in \mathbb{R}$ について $t\mathbf{w}$ も解である。すなわち、
$$\mathbf{w} \in W,\ t \in \mathbb{R} \implies t\mathbf{w} \in W.$$

● 5-2：部分空間

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間が満たす性質 (SS0), (SS1), (SS2) と同じ性質を持つ $\mathbb{R}^n$ の部分集合は、部分空間と呼ばれる。

定義 5-2-1

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が次の３つの条件を満たすとき、W は $\mathbb{R}^n$ の**部分空間**であると呼ばれる。

(SS0) $\mathbf{0} \in W$.

(SS1) すべての $\mathbf{w},\ \mathbf{w}' \in W$ に対して $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$.

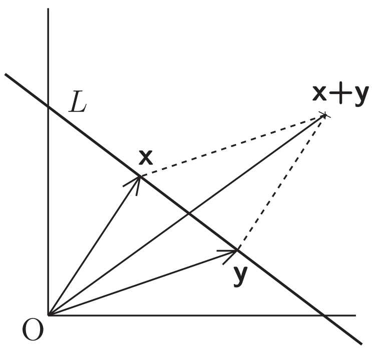
(SS2) すべての $\mathbf{w} \in W$ とすべての $t \in \mathbb{R}$ について $t\mathbf{w} \in W$.

注意：上の条件 (SS1)(SS2) を満たすような部分集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ について、条件 (SS0) が成り立つことと W が空集合 $\varnothing$ でないこととは同値である。

例 5-2-2 (m,n)-行列 A に対して、$W = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

例 5-2-3 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 自身は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。また、零ベクトル $\mathbf{0}$ のみからなる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{\mathbf{0}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

例 5-2-4 (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線 L は、$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をその方向ベクトルとすると $L = \{\ t\mathbf{p} \mid t \in \mathbb{R}\ \}$ と表わすことができるので、$\mathbb{R}^2$ の部分空間である。これに対し、原点を通らない直線 L は部分空間でない (右図参照)。同様に、3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるが、原点を通らない直線は部分空間でない。

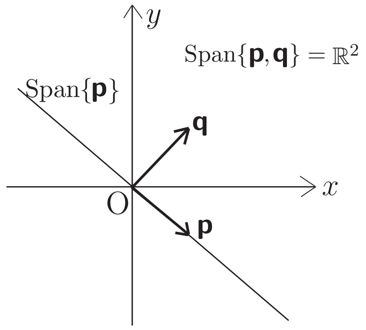


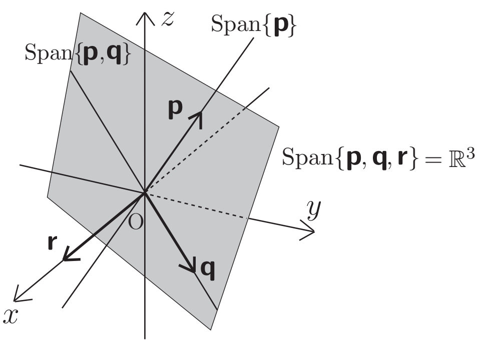
(2) 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る平面 H は 2 つの平行でないベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ を用いて、$H = \{\ s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s,\ t \in \mathbb{R}\ \}$ と表わすことができるので、$\mathbb{R}^3$ の部分空間である。これに対し、原点を通らない平面は部分空間でない。

例 5-2-5 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$ を $\mathbb{R}^n$ に属する d 個のベクトルとする。$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$ の一次結合の全体からなる集合

(5-2 a)
$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\} = \{\ t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d \mid t_1, \cdots, t_d \in \mathbb{R}\ \}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる。これを "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$" によって**張られる部分空間**という。この空間はまた "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$" によって**生成される部分空間**と呼ばれることもある。この授業では、$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\}$ を $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\}$ と略記する。





例えば、$\mathbb{R}^2$ の基底 "$\mathbf{p}, \mathbf{q}$" に対して、$\mathrm{Span}\{\mathbf{p}\}$ は $\mathbb{R}^2$ の中の $\mathbf{p}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線であり、$\mathrm{Span}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ は $\mathbb{R}^2$ である。また、$\mathbb{R}^3$ の基底 "$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$" に対して、$\mathrm{Span}\{\mathbf{p}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の中の $\mathbf{p}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線であり、$\mathrm{Span}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の中の $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ によって張られる原点を通る平面であり、$\mathrm{Span}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ は $\mathbb{R}^3$ そのものである。 □

● 5 - 3 ： 部分空間の基底

具体的に与えられた $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W について詳しく知りたいときには、それがどのようなベクトルからなっているのかを具体的に書いてしまうことが一番よい。そのための 1 つの方法は基底を用いることである。

定理 5 - 3 - 1
W を数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。$W \neq \{\mathbf{0}\}$ ならば、次の条件を満たすベクトル $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_d \in W$ が存在する：

すべての元 $\mathbf{x} \in W$ は

(5 - 3 a) $$\mathbf{x} = t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_d\mathbf{w}_d \qquad (t_1,\ \cdots, t_d \in \mathbb{R})$$

のように書き表わされ、かつ、その書き表わされ方が一意的である。

W に属するこのようなベクトルの列 "$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_d$" を W の**基底**と呼ぶ。

上の定理の証明は次節で行う。ここでは、いくつかの具体的に与えられた部分空間について、基底の存在を確認しよう。

例 5 - 3 - 2 (1) $\mathbb{R}^n$ には標準基底と呼ばれる基底が存在する (第 1 節参照)。

(2) $\mathbb{R}^2$ の中の $\mathbf{p}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線 $L = \{\ t\mathbf{p} \mid t \in \mathbb{R}\ \}$ に対し、"$\mathbf{p}$" は L の基底である。また、"$2\mathbf{p}$" や "$-\mathbf{p}$" なども L の基底である。

(3) $\mathbb{R}^3$ の中の平行でないベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ によって張られる平面 $H = \{\ s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s, t \in \mathbb{R}\ \}$ に対し、"$\mathbf{p}, \mathbf{q}$" は H の基底である。また、"$\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}$" も H の基底である。

[補題 1 - 4 - 1] の証明と同様にして、次の言い換えが成立する。

補題 5 - 3 - 3
数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W に属する d 個のベクトルからなる列 "$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_d$" が W の基底であるための必要十分条件は、次の 2 条件が成り立つことである。

(B1) "$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_d$" は W を**張る**。すなわち、任意の $\mathbf{x} \in W$ は

(5 - 3 b) $$\mathbf{x} = t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_d\mathbf{w}_d \qquad (t_1, \cdots, t_d \in \mathbb{R})$$

のように書き表わされる。

(B2) "$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_d$" は**一次独立**である。すなわち、

(5 - 3 c) $$t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_d\mathbf{w}_d = \mathbf{0} \ \ (t_1,\ \cdots, t_d \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \cdots = t_d = 0$$

が成り立つ。一次独立はまた**線形独立**とも呼ばれることがある。

● 5 - 4 ： 連立一次方程式の解空間の基底

(m, n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 $W = \{\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{w} = \mathbf{0}\ \}$ を考える。$W \neq \{\mathbf{0}\}$ のとき、W の基底を一組求めよう。解空間 W の基底はガウスの消去法 (掃き出し法) によって求めることができる。なお、W の基底は、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の**基本解**とも呼ばれる。

例 5 - 4 - 1 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 W は $W=\left\{ s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \;\middle|\; s,t\in\mathbb{R} \right\}$ で与えられ、“$\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$” は W の一組の基底である。 □

一般に、(m,n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 W の基底は次のように求めることができる。$r=\operatorname{rank}A$ とおくと、A に行基本変形と列の入れ替えを有限回施して、

(5 - 4 a)
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ & \text{O} & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形の (m,n)-行列が得られる。$r=n$ ならば、$B=\begin{pmatrix}E_n\\ \text{O}\end{pmatrix}$ であるから、$W=\{\mathbf{0}\}$ となる。そこで以下、$r<n$ の場合を考える。簡単のため、行基本変形だけを施して行列 B が得られたとしよう。すると、連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の任意の実数解は、$t_1,\cdots,t_{n-r}\in\mathbb{R}$ として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表わされることがわかる。

(5 - 4 b)
$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\mathbf{x}_{n-r}=\begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

(5 - 4 c)
$$W=\{\, t_1\mathbf{x}_1+\cdots+t_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \mid t_1,\cdots,t_{n-r}\in\mathbb{R} \,\}$$

であり、さらに、“$\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_{n-r}$” は一次独立であることがわかる。したがって、“$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_{n-r}$” は連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間の基底である。

No.5 2024年10月24日

線形代数2事前練習用演習問題

pre5-1. (部分空間)

W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対してその内積を $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ で表わす。

$$W^{\perp} = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } \mathbf{w} \in W \text{ に対して } \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0\ \}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

pre5-2. (連立一次方程式の解空間の基底)

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

の実数解のなす解空間 W を求めよ。さらにその基底を1組求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre5-1. (SS0) $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ は、任意の $\mathbf{w} \in W$ に対して $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0$ を満たすから、$\mathbf{0} \in W^{\perp}$ である。

(SS1) 任意に $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W^{\perp}$ をとる。$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W^{\perp}$ となることを示す。任意の $\mathbf{w} \in W$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle \qquad (\text{内積の性質より}) \\ &= 0 + 0 \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W^{\perp} \text{ より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W^{\perp}$ である。

(SS2) 任意に $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ と $t \in \mathbb{R}$ をとる。$t\mathbf{x} \in W^{\perp}$ となることを示す。任意の $\mathbf{w} \in W$ に対して

$$\begin{aligned} \langle t\mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle &= t \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle \qquad (\text{内積の性質より}) \\ &= t \cdot 0 \qquad (\mathbf{x} \in W^{\perp} \text{ より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、$t\mathbf{x} \in W^{\perp}$ である。

以上より、$W^{\perp}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

pre5-2. 与えられた連立一次方程式の係数行列を A とおくと、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ガウスの消去法に基づいて、A に行基本変形を施して階段型の行列にすると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ とおき、連立一次方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を後退代入で解くことにより、与えられた連立一次方程式の実数解のなす空間は

$$W = \left\{ \ s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \middle| \ s, t, u \in \mathbb{R} \ \right\}$$

により与えられ、“$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$” は W の基底をなすことがわかる。

線形代数２・第５回 (2024 年 10 月 24 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第５回学習内容チェックシート 2024 年 10 月 24 日

学 籍 番 号 __________________ 氏 名 __________________________

Q1. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W がその部分空間であるための 3 条件を書きなさい。

(SS0) $\boxed{}$

(SS1) $\boxed{}$

(SS2) $\boxed{}$

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- n 次列ベクトルの列 “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” によって張られる部分空間 $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\}$ とは

  $$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\} = \boxed{}$$

  によって定義される $\mathbb{R}^n$ の部分空間のことをいう。
- 行列 A に行基本変形を施して行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られたとすると、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間は $\boxed{}$ で与えられ、その 1 組の基底として $\boxed{}$ が見つかる。

Q3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W $(\neq \{\mathbf{0}\})$ の基底とは何か。定義を下に書きなさい。

$\boxed{}$

上で書いた条件は 2 つの条件に分けられます。その 2 条件を下に書きなさい。

(B1) $\boxed{}$

(B2) $\boxed{}$

Q4. 下表に挙げられている $\mathbb{R}^2$ の部分集合 W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間か。部分空間である場合には右欄に○を、そうでない場合には×を記しなさい。×を記したものについては、理由を書き添えなさい。

W	部分空間？	W	部分空間？
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle\vert\ x - y = 0 \right\}$		$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle\vert\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$	
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle\vert\ x - y = 1 \right\}$		$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle\vert\ xy = 0 \right\}$	

Q5. 第 5 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。