

§5. 関数の微分

この節では関数に対する微分概念が導入される。三角関数が微分可能であることが示される。後半では、積の微分法則 (ライプニッツの公式) や合成関数の微分公式を学ぶ。

連続性を議論するときには、関数の定義域はなんでもよかったが、微分可能性を考えるときには、定義域は开区間、あるいは、それらの和集合で表わされる集合である必要がある。

● 5-1 : 开区間

$a < b$ なる実数 a, b に対して、 $a < x < b$ を満たす実数 x の全体からなる集合を (a, b) と書き、(有界) 开区間という：

$$(5-1 a) \quad (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

$a = -\infty$ や $b = +\infty$ のときにも同様に (a, b) を定義し、开区間という。特に、 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ と表わすことができるので、 \mathbb{R} は开区間である。

● 5-2 : 関数が微分可能とは

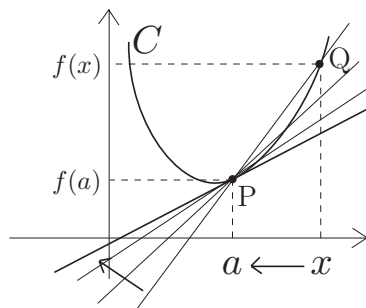
开区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が点 $a \in I$ で**微分可能**であるとは、極限

$$(5-2 a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するときをいう。その値を $f(x)$ の a における**微分係数**といい、 $f'(a)$ や $\frac{df}{dx}(a)$ などと表わす。

すべての $a \in I$ で $f(x)$ が微分可能なとき、 $f(x)$ は**微分可能**であるといい、 $a \in I$ を入力したときに微分係数 $f'(a)$ を出力する関数を $f(x)$ の**導関数**という。

微分係数 $f'(a)$ は以下のような幾何学的な意味を持つ。 a に十分近い点 $x \in I$ を任意にとると、平面上の点 $P(a, f(a))$ と点 $Q(x, f(x))$ を結ぶ直線の傾きは $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ により与えられる。ここで、 x を a に「限りなく近づけて」いくと、 Q は P に「限りなく近づいて」いき、 P と Q を結ぶ直線は点 P で曲線 $C(x) = (x, f(x))$ に接する直線、すなわち、 P における C の接線に「限りなく近づいて」いく。このような考察から、 f の a における微分係数は、幾何学的には、この接線の傾きを表わしていると考えられる。



例 5-2-1 (1) $a, b \in \mathbb{R}$ とする。関数

$$f(x) = a + bx \quad (x \in \mathbb{R})$$

は微分可能である。その導関数は

$$f'(x) = b$$

で与えられる。

(2) $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) は点 0 で微分可能でない。

解;

(1) 任意の $c \in \mathbb{R}$ において $f(x)$ が微分可能であることを示す。 $x \neq c$ であるような任意の実数 x に対して

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(a + bx) - (a + bc)}{x - c} = b \rightarrow b \quad (x \rightarrow c)$$

であるから、 $f(x)$ は c において微分可能で、 $f'(c) = b$ である。

(2) 0 に収束する 2 つの数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{-1/n} = -1$$

となつて、極限が 1 つに定まらないので、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ は存在しない。よつて、 $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) は点 0 で微分可能でない。 □

● 5-3 : 正弦関数・余弦関数の微分可能性

定理 5-3-1

正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$ は微分可能であり、それらの導関数は

$$(5-3 \text{ a}) \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

で与えられる。

(証明)

$$(\star) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(\blacklozenge) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

を使つて、 $\sin x$ が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能であることを示す。 h を 0 でない (十分小さい) 実数とすると、 (\star) , (\blacklozenge) と三角関数の加法公式から、

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{\sin a(\cos h - 1) + (\cos a)(\sin h)}{h} \\ &= \sin a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h} \\ &\rightarrow (\sin a) \cdot 0 + (\cos a) \cdot 1 = \cos a \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

を得る。よつて、正弦関数 $\sin x$ は微分可能であり、導関数は $(\sin x)' = \cos x$ で与えられる。

余弦関数 $\cos x$ についても同様に証明することができる (詳細は演習問題として残す)。 □

● 5-4 : 微分可能性と連続性

定理 5-4-1

开区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が $a \in I$ で微分可能ならば、 a で連続である。

(証明)

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \rightarrow f'(a) \cdot 0 = 0 \quad (x \rightarrow a)$$

となる。これは $f(x)$ が a で連続なことを意味する。 □

注意：定理の逆は成り立たない。

● 5-5：関数の和差積商と微分可能性

开区間 I 上で定義された2つの関数 $f(x), g(x)$ が $a \in I$ で微分可能ならば、4つの関数

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

はすべて a で微分可能であり、微分係数は次で与えられる：

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ (複号同順),
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (ライプニッツの公式)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

但し、4番目の商については、すべての $x \in I$ について $g(x) \neq 0$ かつ $g'(a) \neq 0$ であるときのみ考えることができる。

積の微分公式だけ証明しておこう (残りの公式も同様にして導くことができる)。

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{(f(x) - f(a))g(a) + f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) + f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &\rightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (x \rightarrow a) \end{aligned}$$

※最後の行で、「 $f(x)$ は a で微分可能なので連続」という事実を使った。

例 5-5-1 (1) \mathbb{R} 上で定義された関数 $f_2(x) = x^2$ は微分可能な関数 $f_1(x) = x$ を2つ掛けたものであるから微分可能であり、

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

となる。同様にして、 n を自然数として \mathbb{R} 上で定義された関数 $f_n(x) = x^n$ は微分可能な関数 $f_1(x) = x$ と $f_{n-1}(x) = x^{n-1}$ の積であるから微分可能であり、

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = (x)' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}$$

となる。

(2) 関数 $g_1(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) は、微分可能な関数 $\underline{1}$ と $f_1(x) = x$ ($x \neq 0$) との商の形をしているから微分可能であり、その導関数は商の微分公式より、 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ となる。同様にして、 n を自然数として関数 $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$ ($x \neq 0$) は微分可能であり、その導関数は商の微分公式と(1)より、 $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ となる。

$$(3) (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

● 5-6：合成関数と微分

定理 5-6-1

开区間 I_1 上で定義された関数 $f(x)$ と开区間 I_2 上で定義された関数 $g(y)$ は合成可能であるとする。 $f(x)$ が点 $a \in I_1$ で微分可能で、 $g(y)$ が点 $f(a)$ で微分可能ならば、合成関数 $(g \circ f)(x)$ は点 a で微分可能である。さらに、微分係数は

$$(5-6 a) \quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

で与えられる。

(証明)

$b = f(a)$ とおき、

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = g'(b) + \varepsilon(y) \quad (y \in I_2, y \neq b)$$

とおく。微分係数の定義により、 $\lim_{y \rightarrow b} \varepsilon(y) = 0$ である。任意の $x \in I_1$ ($x \neq a$) に対して、

$$(5-6 b) \quad \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = (g'(f(a)) + \varepsilon(f(x))) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

となる。ここで、関数 $f(x)$ は a で微分可能、したがって、連続なので、 $x \rightarrow a$ のとき $\varepsilon(f(x)) \rightarrow 0$ となる。故に、 $x \rightarrow a$ のときの (5-6 b) の極限は存在し、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = (g'(f(a)) + 0) \cdot f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

となる。 □

例 5-6-2 関数 $h(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$ ($x \in \mathbb{R}$) は、関数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$) と関数 $g(y) = y^5$ ($y \in \mathbb{R}$) の合成関数で表わされる。 $f(x)$ も $g(y)$ も微分可能であるから、 $h(x) = (g \circ f)(x)$ も微分可能であり、導関数は次で与えられる。

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (2x - 3).$$

数学を学ぶ(微分積分1) 第5回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
开区間 (a, b) とは?	p.	
开区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が微分可能であるとは?	p.	

Q2. 次の に適当な言葉や記号・数字を入れなさい。

- 微分可能な関数 $f(x)$ ($x \in I$) の点 $a \in I$ における微分係数とは、極限 のことをいい、これを または で表わす。 f の導関数 f' とは、 $x \in I$ を入力したときに を出力する I 上の関数のことである。
- 微分可能な関数 $f(x), g(x)$ ($x \in I$) の和差積商は微分可能であり、それらの導関数は
 - $(f + g)'(x) = \text{$ $(f - g)'(x) = \text{$
 - $(fg)'(x) = \text{$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \text{$
 により与えられる。このうち、積に対する公式は の公式と呼ばれる。
- 微分可能な関数 $f(x)$ ($x \in I_1$) と微分可能な関数 $g(y)$ ($y \in I_2$) が合成可能なとき、合成関数 $(g \circ f)(x)$ ($x \in I_1$) は微分可能であり、その導関数は次の公式で与えられる。

$$(g \circ f)'(x) = \text{$$
- 正弦関数、余弦関数、正接関数は微分可能であり、それらの導関数は次式で与えられる：

$$(\sin x)' = \text{, } (\cos x)' = \text{, } (\tan x)' = \text{$$
- n を自然数とする。1 への定数関数 $\underline{1}$ 、関数 $f_n(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$), $g_n(x) = x^{-n}$ ($x \neq 0$) はすべて微分可能であり、これらの導関数はそれぞれの定義域内の実数 x に対して $\underline{1}'(x) = \text{, } f_n'(x) = \text{, } g_n'(x) = \text{$ により与えられる。
- 开区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ の連続性と微分可能性について次が成り立つ：

関数 $f(x)$ が ならば である。

Q3. 次の表を完成させてください。

	解決方法・方針
$f(x) = (x^2 + 3x - 1)^n$ ($x \in \mathbb{R}$) のように多項式の n 乗の形をした関数の導関数を求めるには?	

Q4. 第5回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。