§5. 偏微分

この節では、偏微分について説明する。偏微分とは、x, y についての２変数関数に対し、片方の変数を「定数だ」と思って微分することを意味し、本質的には、１変数の微分と変わりがない。しかしながら、偏微分を使って、２変数関数についての驚くべきほど多くのことがわかる (これについては、あとの節を参照)。

1 変数関数の微分可能性を議論するときに、定義域が開区間であるものに限定したのと同様に、2 変数関数の微分可能性を議論するときには、定義域を開集合または領域に限定する必要がある。

● 5 - 1 : 平面の開集合・領域

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点 (a, b) に対して、(a, b) を中心とする半径 ε (> 0) の円の内部

(5 - 1 a) $$U_\varepsilon(a, b) = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon\ \}$$

を (a, b) の ε-近傍と呼ぶのであった。

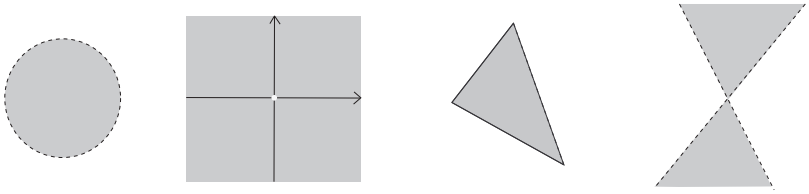
$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**開集合**であるとは、

(5 - 1 b) 任意の $(a, b) \in D$ に対して、$\varepsilon > 0$ を十分小さくとると、$U_\varepsilon(a, b) \subset D$ となる

ときをいう。

D が開集合であって、かつ、任意の２点 $(a, b),\ (c, d) \in D$ を D の中の折れ線で結ぶことができるとき、D を**領域**と呼ぶ。

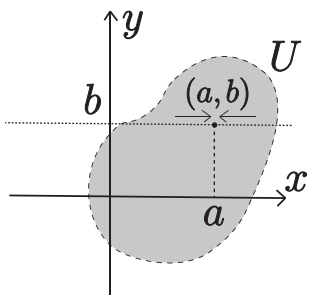
[領域と領域でないものの例]



領域の例　　領域でない例

● 5 - 2 : 偏微分

$\mathbb{R}^2$ のある領域 D 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ を考える。D の中の点 (a, b) に対して、



(5 - 2 a) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき、f は点 (a, b) で x に関して**偏微分可能**であるといい、その極限を f の点 (a, b) における x に関する**偏微分係数**という。この偏微分係数を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ で表わす：

(5 - 2 b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

D の中のすべての点 (a,b) で x に関して偏微分可能なとき、単に、f は x に関して偏微分可能であるという。このとき、D の各点 (a,b) に対して、偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ を対応させる関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ が定まる。この関数を f の x に関する**偏導関数**という。

全く同様に、

(5 - 2 c) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

が存在するとき、f は点 (a,b) で y に関して**偏微分可能**であるといい、その極限を f の点 (a,b) における y に関する**偏微分係数**という。この偏微分係数を $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ で表わす：

(5 - 2 d) $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

D の中のすべての点 (a,b) で y に関して偏微分可能なとき、単に、f は y に関して偏微分可能であるという。このとき、D の各点 (a,b) に対して、偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を対応させる関数 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が定まる。この関数を f の y に関する**偏導関数**という。

例 5 - 2 - 1 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ に対して、偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 \qquad (y \text{ を定数だと思って } f \text{ を微分})$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -20x^3y + 20xy^3 \qquad (x \text{ を定数だと思って } f \text{ を微分})$$

である。

微分可能な 1 変数関数の和、差、積、商が微分可能であることから、領域 D 上で定義された関数 $f(x,y),\ g(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で偏微分可能ならば、４つの関数

$$f(x,y)+g(x,y), \quad f(x,y)-g(x,y), \quad f(x,y)g(x,y), \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

も (a,b) で偏微分可能であることがわかる。但し、４番目の商を考えるときにはすべての $(x,y) \in D$ について $g(x,y) \neq 0$ であることを仮定する。

● 5 - 3 : 2 変数関数の極値

$f(x,y)$ を領域 D 上で定義された関数とする。$f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で**極大**であるとは、十分小さく $\varepsilon > 0$ をとると、

(5 - 3 a) $U_\varepsilon(a,b)$ に含まれる、(a,b) 以外の任意の点 (x,y) に対して $f(x,y) < f(a,b)$

となるときをいい、$f(a,b)$ を $f(x,y)$ の**極大値**という。同様に、十分小さく $\varepsilon > 0$ をとると、

(5 - 3 b) $U_\varepsilon(a,b)$ に含まれる、(a,b) 以外の任意の点 (x,y) に対して $f(x,y) > f(a,b)$

となるとき、$f(x,y)$ は点 (a,b) で**極小**であるといい、$f(a,b)$ を $f(x,y)$ の**極小値**という。極大値と極小値を総称して**極値**と呼ぶ。

例 5 - 3 - 1

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ は $(0,0)$ で極小である。

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=-x^2-y^2$ は $(0,0)$ で極大である。

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ は $(0,0)$ で極小でも極大でもない。

● 5 - 4 : 極値と偏導関数

1 変数関数の場合と同様に、極値をとる所では偏微分の値が 0 になることがわかる。

定理 5 - 4 - 1

領域 D 上で定義された偏微分可能な関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で極値をとるならば、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ である。

(**証明**)

$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとすると、1 変数関数 $g(x)=f(x,b)$ は a で極値をとる。したがって、$g'(a)=0$ でなければならない。$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=g'(a)$ であるから、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ を得る。

同様に、1 変数関数 $h(y)=f(a,y)$ を考えて、$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ がわかる。 □

注意 5 - 4 - 2 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ であるからといって、$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとは限らない。実際、[例 5 - 3 - 1](3) の関数 $f(x,y)$ について

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

となるが、$(0,0)$ で $f(x,y)$ は極値をとらない。 □

例 5 - 4 - 3 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ の極値を与える点は、$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を解いて、$(x,y)=(0,0),(\pm1,0),(0,\pm1)$ の中にあることがわかる。

● 5 - 5 : 偏微分可能性と連続性

1 変数関数の場合には、微分可能であれば連続であった。2 変数関数の場合には、無条件にはこのような結果は成り立たない。実際、以下の 2 つの例が示すように、偏微分可能性と連続性の間には相関関係はない。

例 5 - 5 - 1 次の式で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ は偏微分可能であるが、$(0,0)$ において連続ではない。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)\text{ のとき}),\\ 0 & ((x,y)=(0,0)\text{ のとき}).\end{cases}$$

解；

• f が偏微分可能であること：

$\mathbb{R}^2$ から $(0,0)$ を除いた領域 D において、関数 $g(x,y),\ h(x,y)$ を次のように定義する：

$$g(x,y)=xy,\qquad h(x,y)=x^2+y^2\qquad ((x,y)\in D).$$

g, h は x および y について偏微分可能である。したがって、関数 $\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ も x および y について偏微分可能である。つまり、f は $(0,0)$ を除いたすべての点において x および y について偏微分可能である。

$(0,0)$ においても f は偏微分可能であることを示す。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

であるから、f は $(0,0)$ において x に関して偏微分可能である。同様にして、f は $(0,0)$ において y に関して偏微分可能であることがわかる。

- f が $(0,0)$ において連続でないこと：

$x\neq 0$ に対して

$$f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

となる。よって、$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$ である。よって $f(x,y)$ は連続ではない。 □

注意：$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{2}$ より、$f(0,0)=\frac{1}{2}$ にすればよいように思えるが、このように変更しても $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続にならない。なぜならば、$x\neq 0$ に対して $f(x,-x)=\frac{-x^2}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2}$ となるからである。

例 5 - 5 - 2　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=|x|+|y|$ は連続であるが、$(0,0)$ において偏微分可能でない。

解；

- f が連続であること：

関数 $g(x,y),\ h(x,y)$ を次のように定義する：

$$g(x,y)=|x|,\qquad h(x,y)=|y|\qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2).$$

g, h は連続なので、関数 $f(x,y)=g(x,y)+h(x,y)$ は連続である。

- f が偏微分可能でないこと：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

となる。$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ は存在しないから、f は $(0,0)$ において x に関して偏微分可能でない。 □

上の例のような現象は、「偏微分」を 1 変数の場合の微分の拡張として捉えるには無理があることを示唆している。そもそも偏微分は x 軸方向と y 軸方向という 2 つの方向に関する微分しか考えていないので、定義域が平面的な広がりを持つ 2 変数関数をその 2 方向だけで捉えるには限界があるのである。次回は 1 変数関数に対する微分の概念を反省し、2 変数関数に対するそれに相当する概念を導く。

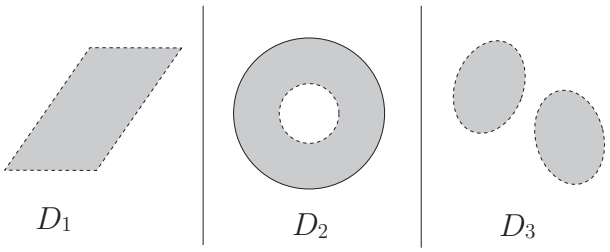
2026 年 10 月 22 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第５回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 下図に描かれた、$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D_1, D_2, D_3 のそれぞれについて、開集合かどうか、領域かどうかを判断しなさい。但し、実線上の点は含まれ、破線上の点は含まれないとします。

解答は下の表に○×で記入しなさい。



	D_1	D_2	D_3
開集合			
領域			

Q2. $f(x,y)$ を領域 D 上で定義された関数とします。次の □ に適当な数式や文字を入れなさい。

(1) 関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b) \in D$ における x に関する偏微分係数および y に関する偏微分係数は、それぞれ次のように定義されている：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \boxed{}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \boxed{}$$

(2) 関数 $f(x,y)$ の x に関する偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を求めるには、□ を定数だと思って □ について f を微分すればよく、y に関する偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めるには、□ を定数だと思って □ について微分すればよい。

Q3. $f(x,y)$ を領域 D 上で定義された関数とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。グラフの様子の欄にはどこで極大値をとるのかが分かるように図を描きなさい。

	ページ	意味	グラフの様子
関数 $f(x,y)$ の極大値とは？	p.		

Q4. 次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
領域 D 上で定義された偏微分可能な関数 $f(x,y)$ の極値を与える点の候補を求めるためには？	

Q5. 第５回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。