§6. 全単射と逆写像

与えられた写像がどのような写像かを調べる際に、それが単射か否か、全射か否かを知ることは基本的な問題である。なぜなら、それによって、定義域と終域の集合のおおよその大きさ (元の個数) を比較することができ、また、これらの概念が逆写像 (逆関数) の存在と関連しているからである。この節では、合成写像の定義、全射、単射、全単射および逆写像の概念を学ぶ。

● 6-1：単射と全射

単射、全射、全単射は写像に対する概念であって、それは次のように定義される。

定義 6-1-1

$f : A \longrightarrow B$ を写像とする。

(1) f が**単射** (injection) であるとは、A の異なる 2 元が f によって B の異なる 2 元に写されるときをいう。すなわち、

$$\text{すべての } a,\ a' \in A \text{ について「} a \neq a' \ \Rightarrow\ f(a) \neq f(a') \text{」}$$

が成り立つときをいう。

(2) f が**全射** (surjection) であるとは、B に属するどの元も A に属するある元の f による像となっているときをいう。

(3) f が**全単射** (bijection) であるとは、f が単射でありかつ全射であるときをいう。

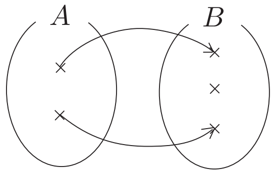
注意 6-1-2

(1) 写像 $f : A \longrightarrow B$ が単射であるための条件は、「 」内の対偶をとることにより、

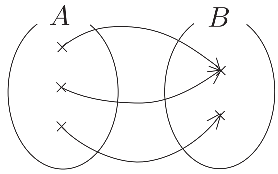
$$\text{すべての } a, a' \in A \text{ について「} f(a) = f(a') \ \Rightarrow\ a = a' \text{」}$$

であることと同値である。したがって、写像が単射であることを証明したいとき、この条件が成り立つことを確かめても構わない。

(2) 単射と全射は次のようなときに役に立つ。集合 A が与えられていて、A から別の集合 B へ何か写像 f を作ったとする。もし、f が単射であれば、A において区別される 2 元は f で写しても B において区別される。つまり、f で写しても「情報が落ちない」ので、舞台を B に移して考えることができる。他方、集合 B が与えられたとき、集合 A から B へ全射な写像 f を作ることができれば、B の中のどんな元も f を経由して A の元を使って表わすことができる。



単射であるが全射でない



全射であるが単射でない

例 6-1-3 (1) 任意の集合 A $(\neq \varnothing)$ に対して、恒等写像 id_A は全単射である。

(2) $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義される関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は、$f(1) = 1 = f(-1)$ となるので単射でなく、$f(x) = -1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないから全射でもない。

(3) 写像 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ を $f(m,n) = \dfrac{m}{n}$ によって定義する。f は全射であるが単射でない。実際、どんな有理数 r も $r = \dfrac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$ のように表わすことができるので、全射である。一方、$f(1,1) = 1 = f(2,2)$ となるので、f は単射でない。 □

例 6-1-4 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$(*) \qquad f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}), \\ x^3 & (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ のとき}). \end{cases}$$

この写像 f は単射か、否かを調べよ。

解;

実際、$x = 2 \in \mathbb{Q}$ と $x' = 2^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対して $f(x) = 2 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = f(x')$ であるが、$x \neq x'$ である。よって、写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射ではない。 □

注意. 上に書かれているのは整理された証明である。考えるときのプロセスは、まず x, x' を定義域の $\mathbb{R}$ の中から任意にとり、それらが $f(x) = f(x')$ を満たしているとして、このような x, x' は $x = x'$ に限られるか否かを調べる。写像 f の定義より、x, x' が有理数なのか無理数なのかによって $f(x), f(x')$ の値は変わる。f が単射であるためには、どの場合においても $f(x) = f(x')$ から $x = x'$ が導かれなければならないが、$x \in \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のときには必ずしも $x = x'$ にならないように思える。実際、$f(x) = f(x')$ を満たす異なる実数の組 (x, x') が上の証明のように見つかるので、単射でないとわかる。

単射性、全射性、全単射性は合成をとる操作の下で保たれる。すなわち、次が成り立つ (証明は演習問題とする)。

補題 6-1-5

写像 $f : A \longrightarrow B$ と写像 $g : B \longrightarrow C$ が与えられたとき、

(1) $f,\ g$ が共に単射ならば合成写像 $g \circ f$ も単射である。

(2) $f,\ g$ が共に全射ならば合成写像 $g \circ f$ も全射である。

(3) $f,\ g$ が共に全単射ならば合成写像 $g \circ f$ も全単射である。

● 6-2：逆写像

写像 $f : A \longrightarrow B$ が全単射であるとき、任意の $b \in B$ について $f(a) = b$ となる $a \in A$ は存在し（$\because f$ は全射）、かつ、そのような $a \in A$ は唯一つ（$\because f$ は単射）である。したがって、全単射 $f : A \longrightarrow B$ に対しては、各 $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ を対応させることによって、B から A への写像を定めることができる。この写像を f の**逆写像** (inverse map) といい、$f^{-1} : B \longrightarrow A$ または単に f^{-1} によって表わす。記号 f^{-1} は「エフ インヴァース」と読む。逆写像の定義により、$f : A \longrightarrow B$ が全単射であるとき、$a \in A,\ b \in B$ について

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$$

が成り立つ。

例 6-2-1 次の写像 f は全単射であることを示し、その逆写像 f^{-1} を求めよ。

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

解；

- 単射であること：

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ が、$f(x_1) = f(x_2)$ を満たしているとき、$x_1 = x_2$ となることを示せばよい。

$f(x_1) = f(x_2)$ ならば、$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$ である。この両辺に -4 を加えてから、$\frac{1}{3}$ 倍することにより、$x_1 = x_2$ が得られる。よって、f は単射である。

- 全射であること：

$y \in \mathbb{R}$ を任意にとる。このとき、$y = f(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在することを示せばよい。

まず、このような x が存在したと仮定すると、x はどのようなものでなければならないかを考える。そのために、$y = f(x) = 3x + 4$ を x について解く。すると、$x = \frac{y-4}{3}$ となることがわかる。そこで、$y \in \mathbb{R}$ に対して $x = \frac{y-4}{3} \in \mathbb{R}$ を取る。すると、

$$f(x) = 3x + 4 = 3 \times \frac{y-4}{3} + 4 = y$$

となることがわかる。よって、f は全射である。

f は単射であって全射であることが示されたから、全単射である。よって、逆写像が存在する。その逆写像 f^{-1} は、f が全射であることの証明から、

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y-4}{3} \quad (y \in \mathbb{R})$$

によって与えられることがわかる。 □

● 6 - 3 ： 全単射の言い換え

全単射および逆写像の定義から次の補題が成り立つことがわかる。

補題 6 - 3 - 1

写像 $f : A \longrightarrow B$ が全単射であるとき、

(1) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ が成り立つ。

(2) $f^{-1} : B \longrightarrow A$ は全単射であり、$(f^{-1})^{-1} = f$ が成り立つ。

全単射が登場する場面では、その定義や背景から全単射であることが容易に想像される場合が多々ある。このようなときには、全射かつ単射を示すのではなく、逆写像 (となるべき写像) を先に与えてしまうことによって全単射であることを示す方法がとられる。この方法の正当性を保証するのが次の定理である。

定理 6 - 3 - 2

写像 $f : A \longrightarrow B$ について、次の 2 つは同値である。

(i) f は全単射である。

(ii) 写像 $g : B \longrightarrow A$ であって、$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすものが存在する。

このとき、さらに、$g = f^{-1}$ が成り立つ。

(証明)

• (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明：f が全単射ならば、逆写像 f^{-1} が存在する。これを g とおけば、定理の条件 (ii) を満たす ([補題 6 - 3 - 1])。

• (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明：

定理の条件 (ii) を満たす写像 $g : B \longrightarrow A$ が存在したと仮定する。このとき、f が全単射であることを示す。

▶ f が単射であること：$a,\ a' \in A$ を任意にとる。もし、$f(a) = f(a')$ であれば、この両辺に g を作用させて、$g(f(a)) = g(f(a'))$ となる。ここで、$g \circ f = \mathrm{id}_A$ を使って、

$$a = \mathrm{id}_A(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a') = \mathrm{id}_A(a') = a'$$

を得る。よって、f は単射である。

▶ f が全射であること：$b \in B$ を任意にとる。$a = g(b) \in A$ を考える。g は $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たしているから、

$$f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathrm{id}_B(b) = b$$

となる。よって、f は全射である。

● 最後に条件 (ii) の g が f の逆写像 f^{-1} と等しいことを示す。g も f^{-1} も B から A への写像であることに注意する。さて、任意に $b \in B$ をとり、$a = g(b)$ とおく。上で示したように $b = f(a)$ となるから、

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a = g(b)$$

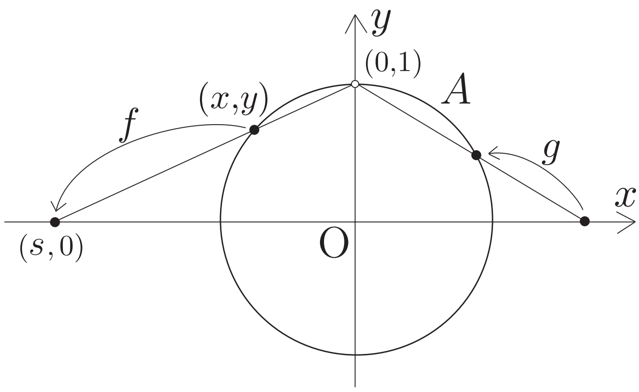
が成り立つ。よって、$g = f^{-1}$ である。 □

例 6-3-3 単位円 $\mathbb{S}^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \,\}$ から点 $\mathrm{N}(0, 1)$ を除いた部分 $A = \mathbb{S}^1 - \{\mathrm{N}\}$ と数直線 $\mathbb{R}$ との間に全単射が存在する。

(**証明**)

写像 $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow A$ であって、$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ かつ $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ となるものを構成すればよい。

f は点 $(x, y) \in A$ に対して、点 $(0, 1)$ から点 (x, y) へ向かう半直線と直線 $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ との交点の座標 $(s, 0)$ を対応させて作る。



具体的に式で書くと次のようになる：

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \frac{x}{1-y}.$$

f の逆写像 g は $\mathbb{R}$ の点 s に対して、点 $(0, 1)$ から点 $(s, 0)$ へ向かう半直線と A との交点を対応させて作ることができる。具体的に式で書くと次のようになる：

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow A, \quad g(s) = \left(\frac{2s}{1+s^2}, \frac{s^2-1}{1+s^2}\right)$$

簡単な計算より、$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $g \circ f = \mathrm{id}_A$ が確かめられるので、φ は全単射であり、その逆写像は g で与えられることがわかる。 □

[定理 6-3-2] の簡単な応用として次を示すことができる (証明は演習問題とする)。

系 6-3-4

写像 $f : A \longrightarrow B$ と $g : B \longrightarrow C$ が共に全単射であるとき、$g \circ f$ は全単射であって、次の等式が成り立つ：

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$