§6. 有理数の構成的な定義

有理数とは、整数 p と 0 でない整数 q を用いて $\frac{p}{q}$ の形に書かれる数のことをいう。$\frac{p}{q}$ は分数と呼ばれ、p, q をそれぞれ**分子**, **分母**と呼ぶ。分数の計算規則により、$\frac{2p}{2q} = \frac{p}{q}$ のように、分母と分子に同じ数が掛けられていれば“約す”ことができる。この約す操作に同値類の考え方が使われている。ここでは、同値類の概念を使って、整数から有理数を構成する方法を説明する。

● 6-1：有理数の構成方法および和と積の定義

$X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ 上の次の同値関係 $\sim$ を考える：

$$(a, x) \sim (b, y) \iff ay = bx.$$

この同値関係 $\sim$ に関する $(a, x) \in X$ の同値類を $[a, x]$ と書き、商集合 $X/\!\sim = \{\, [a, x] \mid (a, x) \in X \,\}$ を $Q(\mathbb{Z})$ と書くことにする。$Q(\mathbb{Z})$ の 2 元 $[a, x]$, $[b, y]$ に対して、$[a, x] + [b, y]$ と $[a, x] \cdot [b, y]$ を次のように定める。

(※) $$[a, x] + [b, y] = [ay + bx, xy], \qquad [a, x] \cdot [b, y] = [ab, xy].$$

演習 6-1 $[a, x]$, $[b, y] \in Q(\mathbb{Z})$ に対して、$[a, x] + [b, y]$ と $[a, x] \cdot [b, y]$ は、代表元の選び方によらずに矛盾なく定義されていることを示せ。

● 6-2：$Q(\mathbb{Z})$ の和と積の性質

$Q(\mathbb{Z})$ は上で定めた和 $[a, x] + [b, y]$ と積 $[a, x] \cdot [b, y]$ に関して体をなす。すなわち、以下の性質を持つ。

(a) 任意の $r, s, t \in Q(\mathbb{Z})$ に対して、
  (i) **結合法則**：$(r + s) + t = r + (s + t)$, $(rs)t = r(st)$.
  (ii) **交換法則**：$r + s = s + r$, $rs = sr$.
  (iii) **分配法則** $r(s + t) = rs + rt$, $(r + s)t = rt + st$.

(b) **0 の存在**：$\mathbf{0} := [0, 1]$ と定めると、任意の $r \in Q(\mathbb{Z})$ に対して $r + \mathbf{0} = r = \mathbf{0} + r$.

(c) **1 の存在**：$\mathbf{1} = [1, 1]$ と定めると、$\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ であって、任意の $r \in Q(\mathbb{Z})$ に対して $\mathbf{1} \cdot r = r = r \cdot \mathbf{1}$.

(d) **マイナス元の存在**：$r = [a, x] \in Q(\mathbb{Z})$ $(a, x \in \mathbb{Z},\ x \neq 0)$ に対して、$-r = [-a, x] \in Q(\mathbb{Z})$ と定めると、$r + (-r) = (-r) + r = \mathbf{0}$.

(e) **逆元の存在**：$r = [a, x] \in Q(\mathbb{Z})$ が $\mathbf{0}$ でなければ、$r^{-1} = [x, a] \in Q(\mathbb{Z})$ を考えることができ ($\because$ $[a, x] \neq \mathbf{0}$ より $a \neq 0$ なので $[x, a] \in Q(\mathbb{Z})$ を考えることができる)、
$$rr^{-1} = \mathbf{1} = r^{-1}r.$$

さて、$[a, x] \in Q(\mathbb{Z})$ を $\frac{a}{x}$ という「分数」の形で改めて書き表わし、等式 (※) を書き直すと、

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay + bx}{xy}, \qquad \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$$

となる。これは今まで使ってきた有理数に対する和、積と同じ式である。これで、分数の意味、特に、約分の意味が明確になった。そして、有理数に対する和と積は商集合 $Q(\mathbb{Z})$ 上の和と積として定式化されることがわかった。

● 6 - 3 : 有理数の差と商

体 $\mathbb{K}$ の定義には和と積しか登場しないが、差と商はこれらを用いて次のように定義される。

- $a, b \in \mathbb{K}$ に対して
$$a - b := a + (-b).$$
ここで、$-b$ は b のマイナス元を表わす。
- $a, b \in \mathbb{K}$ $(b \neq 0_{\mathbb{K}})$ に対して
$$a \div b := a \cdot b^{-1}.$$
ここで、b^{-1} は b の逆元を表わす。

したがって、$Q(\mathbb{Z})$ における差と商はそれぞれ次のように定義される。
$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} := \frac{a}{x} + \left(-\frac{b}{y}\right) = \frac{a}{x} + \frac{-b}{y} = \frac{ay - bx}{xy},$$
$$\frac{a}{x} \div \frac{b}{y} := \frac{a}{x} \cdot \left(\frac{b}{y}\right)^{-1} = \frac{a}{x} \cdot \frac{y}{b} = \frac{ay}{xb}.$$

これらは、私たちが通常、分数の計算において使っている差と商の計算規則と一致している。つまり、$\mathbb{Q}$ における和差積商は商集合 $Q(\mathbb{Z})$ 上の和差積商として実現されることがわかる。

● 6 - 4 : 有理数の大小関係

有理数に対しては和と積の他に大小関係を考えることができた。$\mathbb{Q}$ 上の大小関係に相当する $Q(\mathbb{Z})$ 上の関係 $\leq$ は、$Q(\mathbb{Z}) \ni r = [a, x], s = [b, y]$ $(x > 0,\ y > 0)$ に対して、

$$r \leq s \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad ay \leq bx \tag{$\sharp$}$$

により与えられる。但し、右辺の不等号は整数における通常の大小関係を表わす。この関係 $\leq$ が矛盾なく定義されていることを見ておこう。$r = [a', x'],\ s = [b', y']$ $(x' > 0,\ y' > 0)$ とも書けているとする。すると、次が得られる：
$$\begin{aligned}(a'y')xy &= (a'x)yy' = (ax')yy' = (ay)x'y' \\ &\leq (bx)x'y' = xx'(by') = xx'(b'y) = (b'x')xy.\end{aligned}$$

$x, y > 0$ なので、上の不等式から $a'y' \leq b'x'$ が従う。これで、$Q(\mathbb{Z})$ 上の関係 $\leq$ が矛盾なく定義されていることが示された。

● 6 - 5 : $Q(\mathbb{Z})$ 上の関係 $\leq$ の性質

$Q(\mathbb{Z})$ 上に定義された関係 $\leq$ は次の性質を持つ。任意の $r, s, t \in Q(\mathbb{Z})$ に対して

- (**反射律**) $r \leq r$.
- (**反対称律**) $r \leq s,\ s \leq r \implies r = s$.
- (**推移律**) $r \leq s,\ s \leq t \implies r \leq t$.
- (**全順序性**) $r \leq s$ または $s \leq r$ が成立する。

さらに、加法、乗法と $\leq$ との間に次が成り立つ。任意の $r, s, t \in Q(\mathbb{Z})$ に対して

- $r \leq s \implies r + t \leq s + t$.
- $r \leq s,\ 0 \leq t \implies rt \leq st$.

演習 6- 2 $r, s \in Q(\mathbb{Z})$ に対して $r \leq s$ か $s \leq r$ の少なくともいずれか一方が成り立つことを示せ。

こうして、$Q(\mathbb{Z})$ 上の関係 $\leq$ は、有理数の不等式を計算する際に用いるあらゆる性質を持つことがわかる。以上より、有理数同士の計算を行う際に使ってきたすべての規則や法則が、商集合 $Q(\mathbb{Z})$ を舞台として実現されることがわかる。

● 6-6：「$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$」の意味

我々は有理数の計算の際に「$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$」という事実をしばしば使う。「整数は有理数の一部である」ということは有理数の構成的な定義からは当たり前のことではない。そこで、「$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$」の意味を説明する。

各 $a \in \mathbb{Z}$ に $[a, 1] \in Q(\mathbb{Z})$ を対応させる写像 $j : \mathbb{Z} \longrightarrow Q(\mathbb{Z})$ を考える。この写像は単射である。なぜならば、$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、$[a, 1] = [b, 1]$ であったとすると、$a = a \cdot 1 = b \cdot 1 = b$ となるからである。そこで、この単射 j を通して $\mathbb{Z} \subset Q(\mathbb{Z})$ とみなすことにする。すなわち、$a \in \mathbb{Z}$ を $[a, 1] \in Q(\mathbb{Z})$ と同一視して、$a = [a, 1]$ と約束する。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して

- $[a, 1] + [b, 1] = [a + b, 1]$
- $[a, 1][b, 1] = [ab, 1]$
- $a \leq b \iff [a, 1] \leq [b, 1]$

が成立するので、$Q(\mathbb{Z})$ における和と積の演算、大小関係を $\mathbb{Z}$ 上に制限して考えると、それらは $\mathbb{Z}$ にもともとあった演算、大小関係に一致していることがわかる。このことは、演算、大小関係を込めて $\mathbb{Z} \subset Q(\mathbb{Z})$ とみなされ得ることを意味する。j によって $\mathbb{Z}$ における $0, 1$ が $Q(\mathbb{Z})$ における $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ にそれぞれ写されることにも注意しよう。

● 6-7：順序関係

第 6-5 節において、$Q(\mathbb{Z})$ 上の関係 $\leq$ が持つ性質を 6 つ列挙した。そのうち、最初の 3 つ—反射律、反対称律、推移律—を満たす関係は順序関係と呼ばれている。すなわち、空でない集合 X 上の関係 O が次の 3 つの条件を満たすとき、O は**順序関係** (order relation) である、または、**順序** (order) であるという。

(i) (**反射律**) 任意の $x \in X$ に対して、xOx である。
(ii) (**反対称律**) 任意の $x, y \in X$ に対して、「「xOy かつ yOx」ならば $x = y$」である。
(iii) (**推移律**) 任意の $x, y, z \in X$ に対して、「「xOy かつ yOz」ならば xOz」である。

順序関係は通常、記号 $\leq$ を使って表わすことが慣例になっているので、今後は O の代わりに $\leq$ を使う。$a, b \in X$ に対して、$b \leq a$ のことを $a \geq b$ とも書く。また、$b \leq a$ かつ $b \neq a$ であることを $b < a$ または $a > b$ で表わす。

例 6-7-1 (1) $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ において、いつも使っている不等号 $\leq$ を考えると、これは X の順序である。この順序を X 上の大小関係という。
(2) S を集合として、$\mathscr{P}(S) = \{\ S \text{ の部分集合全体}\ \}$ を考える。$\mathscr{P}(S)$ 上の関係 $\leq$ を次のように定義する。$A, B \in \mathscr{P}(S)$ に対して、

$$A \leq B \iff A \subset B.$$

関係 $\leq$ は $\mathscr{P}(S)$ 上の順序である。この順序を**包含関係**による順序という。

演習 6-3* $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の関係 $\preceq$ を、$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in X$ に対して、

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \iff \text{「}a_1 < b_1\text{」または「}a_1 = b_1 \text{ かつ } a_2 \leq b_2\text{」}$$

と定義する。但し、$\leq$ は $\mathbb{R}$ の大小関係である。$\preceq$ は X 上の順序であることを示せ。

● 6 - 8 : 全順序

集合 X $(\neq \varnothing)$ 上の順序 $\leq$ が、条件

($\sharp$) 「任意の $x, y \in X$ に対して、$x \leq y$ または $y \leq x$ である」

を満たすとき、X 上の**全順序** (total order) であるという。

例 6 - 8 - 1 (1) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上の大小関係や演習 6-3 の $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の順序 $\preceq$ は全順序である。

(2) [例 6 - 7 - 1(2)] の $\mathscr{P}(S)$ 上の順序 $\subset$ は、S の元の個数が 2 個以上のとき、全順序ではない。

(3) $\mathbb{N}$ 上に関係 $\leq$ を次のように定める：$a, b \in \mathbb{N}$ に対して

$$a \leq b \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a|b.$$

これは順序であるが、全順序でない。実際、約数の性質（§1 を参照）より、上記の $\leq$ は順序であることがわかる。一方、$2, 3 \in \mathbb{N}$ に対して $2|3$ も $3|2$ も成り立たないので、$X = \mathbb{N}$ の上記により与えられる順序は ($\sharp$) を満たさないので、全順序ではない。 □

● 6 - 9 : 順序集合

順序が指定された集合のことを**順序集合** (ordered set) という。順序集合を、集合 X $(\neq \varnothing)$ とその上の順序 $\leq$ との組 $(X, \leq)$ によって表わす。$\leq$ が全順序のとき、順序集合 $(X, \leq)$ を**全順序集合** (totally ordered set) という。

● 6 - 10 : 順序体

体 $K = (K, +, \cdot)$ 上に全順序 $\leq$ が与えられているとする。次の 2 条件が満たされるとき、組 $(K, +, \cdot, \leq)$ は**順序体** (ordered field) であるという。

(OF1) 任意の $x, y, z \in K$ に対して、「$x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$」である。

(OF2) 任意の $x, y, z \in K$ に対して、「「$x \leq y$ かつ $0 \leq z$」ならば $xz \leq yz$」である。

例えば、有理数体 $\mathbb{Q}$、実数体 $\mathbb{R}$ は通常の和と積、大小関係に関して順序体になる (第 6 - 5 節で $Q(\mathbb{Z})$ 上の関係 $\leq$ の性質を 6 個列挙したが、そのことは、$(Q(\mathbb{Z}), +, \cdot, \leq)$ が順序体であるということを言っていたことになる)。一方、複素数体 $\mathbb{C}$ にいかなる全順序を導入しても順序体にはならないことが知られている。

演習 6- 4 順序体 $K = (K, +, \cdot, \leq)$ に属する 2 元 a, b に対して、次が成り立つことを示せ。

(1) $a \leq 0$ ならば $-a \geq 0$ である。

(2)「$a \leq 0$ かつ $b \geq 0$」ならば $ab \leq 0$ である。

(3) $a^2 \geq 0$ である。