§6. 逆行列を用いた連立一次方程式の解法

前回は連立一次方程式を拡大係数行列を用いて表わして解いた。今回は、第１節で説明した方法、つまり、ベクトルと行列の積を使って連立一次方程式を表わして解こう。特に、未知数の個数と方程式の個数が等しい場合を扱う。この場合、連立一次方程式を解くことは係数行列の逆行列を求める問題に帰着される。

● 6-1： 行列を使った連立一次方程式の表示 (ベクトルと行列の積)

連立一次方程式は、第１節で説明したように、ベクトルと行列の積を使って表わされる。例えば、連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

は、

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とおくと、$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ のように表わされる。

一般に、a_{ij}, b_i $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ を定数とし、$x_1\cdots,x_n$ を未知数とする連立一次方程式

$$\text{(6-1 a)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

に対して、(m,n)-行列 A, n 次ベクトル $\mathbf{x}$, m 次ベクトル $\mathbf{b}$ を

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

により定義する (A を与えられた連立一次方程式の係数行列と呼ぶのであった)。すると、連立方程式 (6-1 a) は

$$\text{(6-1 b)} \qquad A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

のように書き表わすことができる。

● 6-2： 連立一次方程式の解と係数行列の逆行列

連立一次方程式 (6-1 a) において $m=n$ の場合、すなわち、未知数と方程式の個数が等しい場合を考える。このとき、もし、連立一次方程式 (6-1 a) の係数行列 A に対して、$XA=E_n$ となる n 次正方行列 X が見つかったとする (但し、E_n は単位行列である)。すると、$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の両辺に左から X を掛けることにより、

$$\mathbf{x}=E_n\mathbf{x}=XA\mathbf{x}=X\mathbf{b}$$

を得る。つまり、$XA=E_n$ となる n 次正方行列 X が見つかれば、連立一次方程式 (6-1 a) の解を求めることができる。

例 6-2-1 連立一次方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+3z=2 \\ 3x+7y+11z=1 \end{cases}$$

の係数行列は $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ である。$X=\begin{pmatrix} 12 & -1 & -3 \\ -13 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと、$XA=E_3$ である

から、与えられた連立一次方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=X\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。 □

問 どのようにすれば、このような X を見つけることができるか？

● 6-3：正則行列とその逆行列

上の問いを考察するために、正則行列とその逆行列の概念を導入する。

定義 6-3-1

n 次正方行列 A が**正則**である、または、**可逆**であるとは、

(6-3 a) $$AX=XA=E_n$$

となる n 次正方行列 X が存在するときをいう。

このような X を A の**逆行列**といい、記号 A^{-1} によって表わす (A^{-1} は「エイ インヴァース」と読む)。

注意 6-3-2 連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の係数行列 A が正則ならば、その解を $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$ により求めることができる。

例 6-3-3

(1) $n=1$ のとき、行列 $A=(a)$ は $a\neq 0$ のとき逆行列を持ち、$A^{-1}=(a^{-1})$ である。

(2) $n=2$ のとき、行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

(6-3 b) $$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則 (つまり、逆行列を持つ)} \iff ad-bc\neq 0$$

となる。このとき、

(6-3 c) $$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

$ad-bc$ を $|A|$ で表わす：$|A|=ad-bc.$

(**証明**)

(2) のみ示す。まず、A が正則であると仮定する。$X=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ を A の逆行列とすると、$AX=E_2$ が成り立つ。各成分を比較して、次の等式を得る。

$$\begin{cases} ax+by=1 & \cdots\cdots ① \\ cx+dy=0 & \cdots\cdots ② \end{cases} \qquad \begin{cases} az+bw=0 & \cdots\cdots ③ \\ cz+dw=1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

加減法により、

(6-3 d) $$(ad-bc)x=d,\quad (ad-bc)y=-c,\quad (ad-bc)z=-b,\quad (ad-bc)w=a$$

が成り立つことがわかる。もし、$ad - bc = 0$ であったとすると $a = b = c = d = 0$ となり、$AX = E_2$ は成立しないから $ad - bc \neq 0$ がわかる。さらにこのとき、(6-3 d) を解いて $X = A^{-1}$ は (6-3 c) により与えられることがわかる。

次に、$|A| \neq 0$ を仮定する。すると、(6-3 c) の右辺の行列が定まる。これを X とおくと、$XA = E_2 = AX$ を満たすことが確かめられる。よって、A は正則である。 □

例 6-3-4 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ は $|A| = 7 \neq 0$ を満たすので、正則である。A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

で与えられる。 □

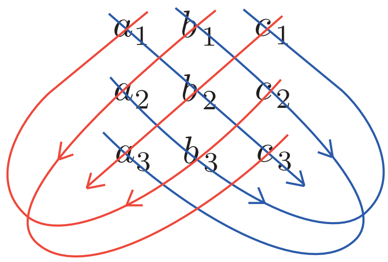
例 6-3-5 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{aligned} &A \text{ が正則 (つまり、逆行列を持つ)} \\ &\iff |A| = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \neq 0 \end{aligned} \tag{6-3 e}$$

であり、このとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 & b_3c_1 - c_3b_1 & b_1c_2 - c_1b_2 \\ c_2a_3 - a_2c_3 & c_3a_1 - a_3c_1 & c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_2b_3 - b_2a_3 & a_3b_1 - b_3a_1 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \Leftarrow \text{第 1 行の } (b, c) \text{ を } (c, a) \text{ に置き換え} \\ \Leftarrow \text{第 1 行の } (b, c) \text{ を } (a, b) \text{ に置き換え} \end{array}$$

となる。



☆ $|A|$ は青い線の通っている数をそれぞれ掛けたものから、赤い線の通っている数をそれぞれ掛けたものを引いたものに等しい。この計算方法は**サラスの方法**と呼ばれている。

(6-3 e) を示そう。「$\Leftarrow$」は上の A^{-1} の右辺を X とおくと、$AX = XA = E_3$ となることから、すぐにわかる。

「$\Rightarrow$」を示す。A が $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ を逆行列に持つとする。$XA = E_3$ より、a_1, a_2, a_3 が同時に 0 になることはないことに注意する。

$a_1 \neq 0$ のときを考える。このとき、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-\frac{a_3}{a_1})]{②+①\times(-\frac{a_2}{a_1})} \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1} & \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1} & 1 \\ 0 & \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1} & \frac{a_1c_3 - a_3c_1}{a_1} & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-\frac{a_3}{a_1})]{②+①\times(-\frac{a_2}{a_1})} \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1} & \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1} & \frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1} & 1 \end{array}\right)$$

となるから、$AX = E_3$ の第2列と第3列を取り出して作られる連立一次方程式から、

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1} & \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1} \\ \frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1} & \frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。したがって、[例 6-3-3(2)] の議論から

$$0 \neq \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1} \cdot \frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1} - \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1} \cdot \frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1} = \frac{|A|}{a_1}$$

を得る。$a_2 \neq 0$ の場合、$a_3 \neq 0$ の場合にも、同様にして $|A| \neq 0$ となることがわかる (行を適当に入れ替えて議論すればよい)。 □

注意 6-3-6 第4節で導入されたように、3次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 \\ x_3y_1 - y_3x_1 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との外積と呼ぶ。

この外積を使うと、正則な3次正方行列 $A = (\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})$ の逆行列は次のように書ける：

(6-3 f)
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} (\mathbf{b} \times \mathbf{c})^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{c} \times \mathbf{a})^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

例 6-3-7 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ は正則か？正則なときには、逆行列も求めよ。

解；

$$|A| = 1 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = -7 \neq 0$$

より、A は正則である。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}.\ \text{同様に}\ \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから、A の逆行列は次で与えられる：

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & -12 & 3 \\ -7 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

No.6 2024年5月16日

線形代数1事前練習用演習問題

pre6-1. (正則行列)

次の各行列について正則行列かどうかを調べ、正則であれば逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

pre6-2. (逆行列を用いた連立一次方程式の解法)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ は正則か？正則ならば、その逆行列も求めよ。

(2) 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 2x + 3y + 5z = 13 \\ 3x + 5y + 7z = 17 \end{cases}$$

を解け。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre6-1. [例 6-3-4], [例 6-3-6] を参考に解答する。

(1) 与えられた行列を A とおき、$|A|$ を計算すると、$|A| = \frac{7}{120} \neq 0$ となる。したがって、A は正則であり、その逆行列は

$$A^{-1} = \frac{120}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。

(2) 与えられた行列を A とおき、サラスの方法で $|A|$ を計算すると、$|A| = 0$ であることがわかるから、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は正則ではない。

pre6-2. [例 6-3-6], [例 6-2-1] を参考に解答する。

(1) サラスの方法で $|A|$ を計算すると、$|A| = 1 \neq 0$ であることがわかるから、A は正則である。よって、逆行列を持つ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とおいて外積 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を計算すると次のようになる。

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

したがって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$ とおくと、与えられた連立一次方程式は $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ と表わすことができる。この両辺に左から A^{-1} を掛けることにより、解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ が求まる。

線形代数１・第６回 (2024 年 5 月 16 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第６回学習内容チェックシート 2024 年 5 月 16 日

学 籍 番 号 ____________________ 氏 名 ____________________________

Q1. 次の表を完成させてなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
n 次正方行列 A が正則であるとは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{\quad}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- n 次正方行列 A の逆行列とは、等式 $\boxed{\qquad\qquad}$ を満たす n 次正方行列 X のことをいう。これを $\boxed{\quad}$ という記号で表わす。
- $x_1, \cdots, x_n$ を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は $A = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$, $\mathbf{x} = \boxed{\qquad}$, $\mathbf{b} = \boxed{\qquad}$ とおくと、

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表わされる。

- A が正則なとき、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は、A の逆行列を用いて $\mathbf{x} = \boxed{\qquad}$ で与えられる。
- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則かどうかを知りたければ、$|A| = \boxed{\qquad}$ が 0 でないかどうかを調べればよい。このとき、A の逆行列は公式

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

によって求めることができる。

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ が正則かどうかを知りたければ、

$$|A| = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

が 0 でないかどうかを調べればよい。$|A|$ を計算するための方法は $\boxed{\qquad}$ の方法と呼ばれている。

Q3. 第 6 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。