# §6. 逆行列の求め方

前節では、2 次と 3 次正則行列の逆行列を求める公式を学んだ。この節では、一般の $n$ 次正則行列の逆行列を求める方法を学ぶ。その前に、逆行列の持つ性質について調べよう。

### ● 6-1：逆行列の性質

$n$ 次正方行列 $A$ が**正則**である、または、**可逆**であるとは、

(6-1 a) $$AX = XA = E_n$$

となる $n$ 次正方行列 $X$ が存在するときをいい、このような $X$ を $A$ の**逆行列**といい、記号 $A^{-1}$ によって表わすのであった。

**補題 6-1-1**
逆行列に関して、次が成り立つ。
(1) $n$ 次正方行列 $A$ の逆行列は、それが存在すれば、ただ 1 つである。
(2) $n$ 次正方行列 $A$ が正則ならば、逆行列 $A^{-1}$ も正則であり、$(A^{-1})^{-1} = A$ である。
(3) $n$ 次正方行列 $A, B$ が正則ならば、積 $AB$ も正則であり、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である。

(**証明**)

(1) $X, Y$ を $A$ の逆行列とすると、$X = XE_n = X(AY) = (XA)Y = E_nY = Y$ となる。

(2) 逆行列の定義より $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ が成り立つので、$A^{-1}$ に対しては、逆行列の定義における $X$ に相当するのは $A$ である。よって、$A^{-1}$ は正則であり、$(A^{-1})^{-1} = A$ である。

(3) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$ となる。同様に、$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$ が示されるので、$AB$ は正則であり、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である。 □

### ● 6-2：逆行列の求め方

行列の行基本変形を用いて、逆行列を求めることができる。

**定理 6-2-1**
$A$ を $n$ 次正方行列とし、$(n, 2n)$-行列 $(A \mid E_n)$ を考える。この行列に 3 種類の行基本変形
(Row1) ある行の定数倍を他の行に加える
(Row2) ある行に 0 でない定数を掛ける
(Row3) 2 つの行を交換する
を有限回施して、$(E_n \mid X)$ という形の行列が得られたとする。このとき、$A$ は正則であって、$X$ は $A$ の逆行列である。

**例 6-2-2** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ が正則かどうかを調べ、正則なときにはその逆行列を求めよう。$(3, 6)$-行列 $(A \mid E_3)$ に行基本変形を施して、$(E_3 \mid X)$ という形の行列に変形できるかどうかを調べればよい。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times(-1)+②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times(-2)+③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times(-5)+①]{③\times(-2)+②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 11 & -10 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times(-1)+①}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&-7&3\\0&2&0&3&-3&2\\0&0&1&-2&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{②\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&-7&3\\0&1&0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-2&2&-1\end{array}\right)$$

となるので、$A$ は正則であって、その逆行列は、$A^{-1}=\begin{pmatrix}8&-7&3\\\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1\\-2&2&-1\end{pmatrix}$ である。 □

## ● 6-3：基本行列

[定理 6-2-1] を証明するために、行列に対する行基本変形を、行列の積を使って言い換える必要がある。簡単のため、$A$ が $(3,4)$-行列の場合に説明しよう (他の形の行列の場合も同様)。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

とおく。

• <u>$A$ のある行の $t$ 倍を他の行に加える変形</u>：

例えば、$A$ の第 1 行の $t$ 倍を第 3 行に加えるという操作 (③+①$\times t$) を行って得られる行列は

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}+ta_{11}&a_{32}+ta_{12}&a_{33}+ta_{13}&a_{34}+ta_{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\t&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

と書くことができる。すなわち、$A$ の第 1 行の $t$ 倍を第 3 行に加えることにより得られる行列は、$A$ に左から 3 次正方行列 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\t&0&1\end{pmatrix}$ を掛けることによって得られる。

• <u>$A$ のある行を $t(\neq 0)$ 倍する変形</u>：

例えば、$A$ の第 2 行を $t$ 倍するという操作 (②$\times t$) を行って得られる行列は

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ta_{21}&ta_{22}&ta_{23}&ta_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&t&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

と書くことができる。すなわち、$A$ の第 2 行を $t$ 倍して得られる行列は、$A$ に左から 3 次正方行列 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&t&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ を掛けることによって得られる。

• <u>$A$ の 2 つの行を入れ替える変形</u>：

例えば、$A$ の第 1 行と第 2 行を入れ替えるという操作 (① $\leftrightarrow$ ②) を行って得られる行列は

$$\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

と書くことができる。すなわち、$A$ の第 1 行と第 2 行を入れ替えて得られる行列は、$A$ に左から 3 次正方行列 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ を掛けることによって得られる。

一般に、$(m,n)$-行列 $A$ から

- 第 $i$ 行の $t$ 倍を第 $j$ 行に加えることにより得られる行列
- 第 $i$ 行を $t$ 倍して得られる行列
- 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換して得られる行列

はそれぞれ $A$ に左から次の $m$ 次正方行列 $P_m(i,j;t)$, $Q_m(i;t)$, $R_m(i,j)$ を掛けることにより得られる：

(6-3 a)
$$P_m(i,j;t) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& t &&&& 1 &&& \\ \hline
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\cdots\cdots \text{第 } i \text{ 行目} \\
\\ \\ \\
\cdots\cdots \text{第 } j \text{ 行目} \\
\\ \\ \\
\end{array}$$

(6-3 b)
$$Q_m(i;t) = \begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&& \text{O} & \\
&& 1 &&&& \\
&&& t &&& \\
&&&& 1 && \\
& \text{O} &&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\cdots\cdots \text{第 } i \text{ 行目} \\
\\ \\ \\
\end{array}$$

(6-3 c)
$$R_m(i,j) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\ \hline
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\cdots\cdots \text{第 } i \text{ 行目} \\
\\ \\ \\
\cdots\cdots \text{第 } j \text{ 行目} \\
\\ \\ \\
\end{array}$$

但し、何も書かれていない部分の成分はすべて 0 とする。

| 行基本変形 | 左から掛ける行列 |
|---|---|
| 第 $j$ 行に第 $i$ 行の $t$ $(\neq 0)$ 倍を加える | $P_m(i,j;t)$ |
| 第 $i$ 行を $t$ $(\neq 0)$ 倍する | $Q_m(i;t)$ |
| 第 $i$ 行と第 $j$ 行を入れ換える | $R_m(i,j)$ |

正方行列 $P_m(i,j;t)$, $Q_m(i;t)$, $R_m(i,j)$ (但し、$t \neq 0$, $i \neq j$) を総称して、**基本行列**という。基本行列は正則である。実際、

$$\begin{aligned}
&P_m(i,j;t)P_m(i,j;-t) = P_m(i,j;-t)P_m(i,j;t) = E_m, \\
&Q_m(i;t)Q_m(i;t^{-1}) = Q_m(i;t^{-1})Q_m(i;t) = E_m, \\
&R_m(i,j)R_m(i,j) = E_m
\end{aligned}$$

となることが簡単に確認できるので、基本行列 $P_m(i,j;t)$, $Q_m(i;t)$, $R_m(i,j)$ (但し、$t \neq 0$, $i \neq j$) はそれぞれ基本行列 $P_m(i,j;-t)$, $Q_m(i;t^{-1})$, $R_m(i,j)$ を逆行列として持つ。

### ● 6 - 4 : [定理 6 - 2 - 1] の証明

• $A$ が正則であること：

仮定により、$A$ に行基本変形を有限回行い、単位行列 $E_n$ にすることができる。これは、

$$M_l \cdots M_2 M_1 A = E_n$$

となる基本行列 $M_1, M_2, \cdots, M_l$ が存在することを意味する。この両辺に左から $M_l^{-1}, \ldots, M_1^{-1}$ を順に掛けていき、

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_l^{-1} E_n = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_l^{-1}$$

を得る。各 $M_j^{-1}$ $(j = 1, 2, \cdots, l)$ は正則であるから、正則行列の積として $A$ は正則である。

• $X$ が $A$ の逆行列であること：$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ と表わし、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく。$n$ 次単位行列 $E_n$ は

(6 - 4 a)
$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \ \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、$E_n = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)$ のように表わされる。

仮定により、$(n, 2n)$-行列 $(A \mid E_n)$ に 3 種類の行基本変形を有限回施して $(E_n \mid X)$ に変形することができるので、その最初の $n$ 列と第 $(n+j)$ 列に注目することにより、各 $j = 1, \cdots, n$ について、$(n, n+1)$-行列 $(A \mid \mathbf{e}_j)$ は行基本変形により $(E_n \mid \mathbf{x}_j)$ に変形されることがわかる。このことは、$\mathbf{x}_j$ が連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ の解であることを意味する。したがって、$\mathbf{x}_j$ は $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ を満たす。故に、

$$AX = (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2 \ \cdots \ A\mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) = E_n$$

を得る。先に示したように $A$ は正則なので、左から $A$ の逆行列を掛けることにより、$X = A^{-1}$ を得る。 □

No.6 2026 年 5 月 14 日

# 線形代数１事前練習用演習問題

**pre6-1**. (正則性と逆行列)

　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

は正則かどうかを調べよ。さらに、正則なときには、その逆行列も求めよ。

**pre6-2**. (行基本変形と行列の積)

　4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

と 4 次正方行列 $P$ と $Q$ を考える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 積 $PA$ と $QA$ を求めよ。

(2) $PA$ および $QA$ は、それぞれ、$A$ からどのような行基本変形を続けて行って得られるか？

## ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

**pre6-1**. [例 6 - 2 - 2] と同様の方法で解くことができる。

　行列 $(A|E_4)$ にガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を施して階段型にしてから、後退代入に相当する行基本変形を施して、$(E_4|X)$ の形にできるか否かを調べる。すると、

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}\times(-1)+\text{④}]{\substack{\text{①}\times 2+\text{②} \\ \text{①}\times(-1)+\text{③}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{②}\times 1+\text{③}} \cdots\cdots \xrightarrow{\text{③}\times(-4)+\text{④}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{④}\times(-2)+\text{②}]{\text{④}\times(-2)+\text{①}} \cdots\cdots \xrightarrow{\text{②}\times(-2)+\text{①}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -13 & -10 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & 9 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

となる。したがって、$A$ は正則であり、$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -10 & -8 & 2 \\ 12 & 9 & 8 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ である。

**pre6-2**. 答えのみ記す。

(1) $PA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 4a_{11}+a_{21} & 4a_{12}+a_{22} & 4a_{13}+a_{23} & 4a_{14}+a_{24} \\ 3a_{11}+a_{31} & 3a_{12}+a_{32} & 3a_{13}+a_{33} & 3a_{14}+a_{34} \\ 2a_{11}+a_{41} & 2a_{12}+a_{42} & 2a_{13}+a_{43} & 2a_{14}+a_{44} \end{pmatrix}$,

$QA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

(2) $PA$ は $A$ から第 1 行の 4 倍を第 2 行に加え、第 1 行の 3 倍を第 3 行に加え、第 1 行の 2 倍を第 4 行に加える行基本変形を行って得られる。

$QA$ は $A$ から第 2 行と第 4 行を入れ替えたのち、第 2 行と第 3 行を入れ替える行基本変形を行って得られる（他にも 2 通りの方法あり）。

## 線形代数１・第６回 (2026 年 5 月 14 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

**線形代数１・第６回学習内容チェックシート** 2026 年 5 月 14 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。

| | 解決方法・方針 |
|---|---|
| $n$ 次正方行列 $A$ が正則かどうかを調べるには？さらに、$A$ が正則なとき逆行列を求めるには？ | |

Q2. 次の $\boxed{\phantom{xx}}$ に適当な言葉、数字、記号等を入れなさい。

- $n$ 次正方行列 $A, B$ が正則ならば、積 $AB$ も正則であり、その逆行列は $A, B$ の逆行列を用いて、$(AB)^{-1} = \boxed{\phantom{xxxx}}$ により与えられる。
- 行列 $A$ に行基本変形を施すことは、$A$ に基本行列を $\boxed{\phantom{xx}}$ から掛けることにより実現される。

Q3. $(4, 2)$-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$ にある行基本変形を行って行列 $B$ が得られたとする。このとき、$B$ は $A$ にどのような基本行列 $P$ を掛けたものに一致するか。$A$ に施す行基本変形が次の表に掲げられている各場合に、$B$ と $P$ を求めて、表を完成させなさい。

| 行基本変形 | $B$ | $P$ |
|---|---|---|
| 第 1 行の $t$ 倍を第 4 行に加える | | |
| 第 3 行を $t$ 倍する | | |
| 第 2 行と第 4 行を入れ替える | | |

Q4. 第 6 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。