§6. 部分空間の基底と次元

ここでは、前節で紹介した事実「零ベクトルだけからなる部分空間 $\{\mathbf{0}\}$ を除いて、n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のすべての部分空間に基底が存在する」に証明を与える。さらに、部分空間の基底を構成するベクトルの個数は、基底の選び方に依らないことを証明する。その個数は部分空間の次元と呼ばれ、部分空間の「大きさ」を表わす重要な量である。

● 6-1：一次従属

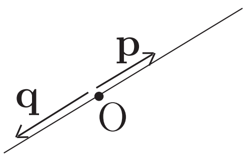
$\mathbb{R}^n$ におけるベクトルの列 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$" は、それが一次独立でないとき、**一次従属**または**線形従属**であると呼ばれる：

(6-1 a)
$$
\begin{aligned}
&\text{“}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\text{” が一次従属} \\
&\iff t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0} \text{ を満たす } t_1,\ \cdots, t_d \in \mathbb{R} \text{ であって、} \\
&\qquad\ \text{同時には } 0 \text{ にならないものが存在する}
\end{aligned}
$$

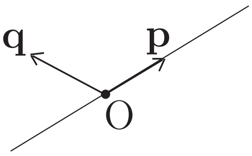
である。これは、さらに、次のように言い換えることができる：

(6-1 b)
$$
\begin{aligned}
&\text{“}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d\text{” が一次従属} \\
&\iff \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d \text{ のある 1 つが残りのベクトルの一次結合で表される}
\end{aligned}
$$

$n = 2$ のとき：

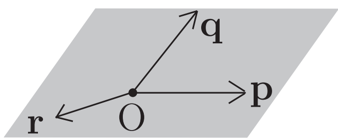


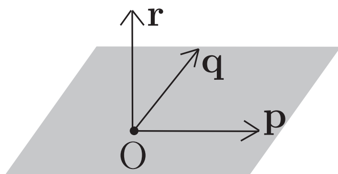
一次従属



一次独立

$n = 3$ のとき：





● 6-2：基底の存在

基底の存在を証明するために必要な補題を２つ準備する。最初の [補題 6-2-1] は「線形代数１」の [定理 13-2-1] の再録である。この結果は「線形代数１」の [定理 12-3-2] で示された次の結果から従う：(m, n)-行列 A について、

(6-2 a) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つ $\iff$ $\operatorname{rank} A < n.$

補題 6-2-1

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において、任意の $(n+1)$ 個のベクトルは一次従属である。

補題 6-2-2

W を数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間、"$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k$" を W の一次独立なベクトルとする。"$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k$" が W を張らないならば、"$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}$" が一次独立となるような $\mathbf{w} \in W$ が存在する。

(**証明**)

“$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k$” によって張られる $\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$U := \{\ t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_k\mathbf{w}_k\ \mid t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}\ \}$$

を考える。$U \subset W$ であるが、“$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k$” は W を張らないので、$U \neq W$ である。したがって、W に属するベクトル $\mathbf{w}$ であって、U には属さないものが存在する。このとき、“$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}$” は一次独立である。実際、

$$t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_k\mathbf{w}_k + t\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad (t_1, \cdots, t_k, t \in \mathbb{R})$$

とおく。もし、$t \neq 0$ であったとすると、

$$\mathbf{w} = -\frac{t_1}{t}\mathbf{w}_1 - \cdots - \frac{t_k}{t}\mathbf{w}_k \in U$$

となり、$\mathbf{w} \notin U$ であることに矛盾する。よって、$t = 0$ である。すると、$t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ となる。“$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k$” は一次独立であるから、$t_1 = \cdots = t_k = 0$ を得る。これは、“$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}$” が一次独立であることを示している。 □

定理 6 - 2 - 3

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の $\{\mathbf{0}\}$ でないすべての部分空間には基底が存在する。

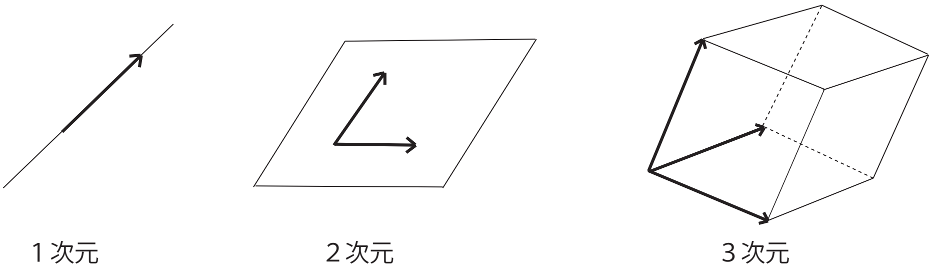
(**証明**)

W を $\mathbb{R}^n$ の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間とする。W の一次独立なベクトルからなる有限列であって、W を張るものは存在しないと仮定して矛盾を導く。

まず、$\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$ なる $\mathbf{w}_1 \in W$ を任意に 1 つとる。“$\mathbf{w}_1$” は一次独立である。仮定により、“$\mathbf{w}_1$” は W を張らない。よって、[補題 6 - 2 - 2] より、“$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$” が一次独立となるような $\mathbf{w}_2 \in W$ が存在する。再び仮定により、“$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$” は W を張らない。よって、“$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$” が一次独立となるような $\mathbf{w}_3 \in W$ が存在する。以下、同様に考えて、W に属する $(n+1)$ 個からなる一次独立なベクトルの列 “$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_{n+1}$” の存在がわかる。これは、[補題 6 - 2 - 1] に矛盾する。 □

● 6 - 3 : 次元

次元とは空間の広がり方を数で表現したものである。例えば、1 次元の空間とはそれが直線的な広がりを持つことを意味し、2 次元とは平面的な広がりを持つことを意味する。そして、3 次元とは我々が住んでいる「空間的」広がりを持つことを意味する。



次元を数学的に捉えるには、そのベクトル空間が最大何個の独立な方向を許容するかを見ればよく、線形代数においては基底を利用すればよい。但し、基底の選び方は一通りでないため、部分空間の基底の個数が基底の選び方によらずに一定であることを示す必要がある。

定理 6-3-1
"$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$" および "$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$" はどちらも $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の基底であるとする。このとき、$d = m$ である。すなわち、W の基底を構成しているベクトルの個数は基底によらずに一定である。この個数 d のことを W の**次元**といい、$\dim_{\mathbb{R}} W$ または単に $\dim W$ という記号で表わす。

定理を証明する前に、いくつかの部分空間に対して、具体的に次元を計算してみよう。

例 6-3-2 $\dim \mathbb{R}^n = n,\ \dim\{\mathbf{0}\} = 0$ である。

例 6-3-3
(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 W に対して、$\dim W$ は $0, 1, 2$ の値を取り得る ([補題 6-2-1])。このうち、$\dim W = 0$ となるのは $W = \{\mathbf{0}\}$ であり ($\because$ [定理 6-2-3])、$\dim W = 2$ となるのは $W = \mathbb{R}^2$ である ($\because$ [定理 1-4-3])。さらに、次の言い換えが成立する。

$$\begin{aligned}\dim W = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad W = \mathrm{Span}\{\mathbf{p}\} \text{ となる零でないベクトル } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \text{ が存在する} \\ &\Longleftrightarrow \quad W \text{ は原点を通る直線.}\end{aligned}$$

(2) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W に対して、$\dim W$ は $0, 1, 2, 3$ の値を取り得る。このうち、$\dim W = 0$ となるのは $W = \{\mathbf{0}\}$ であり、$\dim W = 3$ となるのは $W = \mathbb{R}^3$ である。また、(1) と同様に、$\dim W = 1$ となる W は原点を通る直線であることがわかる。さらに、

$$\begin{aligned}\dim W = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad W = \mathrm{Span}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} \text{ となる一次独立なベクトルの組 “} \mathbf{p}, \mathbf{q} \text{” が存在する} \\ &\Longleftrightarrow \quad W \text{ は原点を通る平面}\end{aligned}$$

という言い換えが成立する。

(**[定理 6-3-1] の証明**)
"$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$" は W の基底であるから、各 $\mathbf{v}_j$ を

$$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m \qquad (a_{1j}, \cdots, a_{mj} \in \mathbb{R})$$

のように書くことができる。j を 1 から d まで動かすと d 個の等式が得られるが、(m, d)-行列 A を $A := (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le d}}$ によって定めると、これらの等式は、

$$(\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_d) = (\mathbf{w}_1\ \cdots\ \mathbf{w}_m)A$$

のようにまとめて表わすことができる。同様に、"$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$" は W の基底であるから、

$$(\mathbf{w}_1\ \cdots\ \mathbf{w}_m) = (\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_d)B$$

を満たす (d, m)-行列 B が存在する。互いに代入して、

$$(\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_d) = (\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_d)BA, \qquad (\mathbf{w}_1\ \cdots\ \mathbf{w}_m) = (\mathbf{w}_1\ \cdots\ \mathbf{w}_m)AB$$

が得られる。基底の定義により、前者の等式から $BA = E_d$ が得られ、後者の等式から $AB = E_m$ が得られる (E_d, E_m は単位行列を表わす)。

$\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1, \cdots, d)$ を A の第 j 列ベクトルとすると、$BA = E_d$ より、"$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_d$" は一次独立である ($\because$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ が $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たしていたとすると、この両辺に左から B を掛け

て $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を得る)。よって、[補題 6 - 2 - 1] により、$d \leq m$ を得る。同様にして、$AB = E_m$ から $m \leq d$ が導かれるので、$d = m$ となることがわかる。 □

● 6 - 4 : 連立一次方程式の解空間の次元

(m, n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $\operatorname{rank} A$ を使って計算することができる。まず、例を見てみよう。

例 6 - 4 - 1 $(3, 4)$-行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ -3 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 W は

$$W = \left\{ t \begin{pmatrix} -14 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

によって与えられる。したがって、$\dim W = 1$ である。

上の例題において、$\dim W = 1 = 4 - \operatorname{rank} A$ となっている。このことは一般に成り立つ。

定理 6 - 4 - 2
(m, n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間を W とおく。このとき、$\dim W = n - \operatorname{rank} A$ が成り立つ。

(証明)

$r = \operatorname{rank} A$ とおくと、A は有限回の行基本変形と列の入れ替えにより、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & \text{O} & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{6 - 4 a}$$

という形の (m, n)-行列に変形される。列の入れ替えを行うと、変数の番号づけを変更するため、解空間自身は変化するが、解空間の基底の個数、つまり、次元は変わらない。したがって、$W' = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$ とおくとき、$\dim W = \dim W'$ が成り立つ。

$r = n$ ならば、$W' = \{\mathbf{0}\}$ であるから、定理の等式は成り立つ。

$r < n$ ならば、W' の基底として、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \mathbf{x}_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。したがって、$\dim W = \dim W' = n - r = n - \operatorname{rank} A$ を得る。 □

No.6 2024年10月31日

線形代数2事前練習用演習問題

pre6-1. (基底の定義)

W を数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 3 次元部分空間とし、"$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$" を W の基底とする。$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^4$ を

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3, \qquad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$$

によって定める。

(1) "$\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$" は一次独立であることを示せ。

(2) "$\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$" は W の基底であることを示せ。

pre6-2. (連立一次方程式の解空間の次元)

$a \in \mathbb{R}$ とする。4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$$

に対して、$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \}$ の次元を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre6-1. (1) $t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + t_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ $(t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$ とおく。左辺を $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ を用いて書き換えて、等式

$$(t_1 + t_3)\mathbf{w}_1 + (t_1 + t_2 + t_3)\mathbf{w}_2 + (t_2 + t_3)\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

を得る。"$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$" は一次独立であるから、連立一次方程式

$$\begin{cases} t_1 + t_3 = 0 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

を得る。これを（必要ならば係数行列にガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を行い、階段型の行列にして）解くことにより、$t_1 = t_2 = t_3 = 0$ であることがわかる。したがって、"$\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$" は一次独立である。

(2) (1) より一次独立であることは示されたから、W を張ることを示せばよい。そのために、任意に $\mathbf{w} \in W$ をとる。仮定により、"$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$" は W を張るから

$$\mathbf{w} = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 + c\mathbf{w}_3 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}) \tag{$*$}$$

と表わすことができる。$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$ を $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ に関して解くことにより、

$$\mathbf{w}_1 = -\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,$$
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3,$$
$$\mathbf{w}_3 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$$

と表わされることがわかる。これらを $(*)$ に代入すると、

$$\mathbf{w} = (b - c)\mathbf{u}_1 + (-a + b)\mathbf{u}_2 + (a - b + c)\mathbf{u}_3$$

となるから、“$\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$” は W を張る。

pre6-2. まず、行列式を計算すると、

$$
\begin{aligned}
|A| &\overset{\substack{\text{第 4 行から}\\ a\text{ を括り出す}}}{=} a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{①\times(-1)+②\\ ①\times(-1)+③\\ ①\times(-1)+④}}{=} a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} \\
&= a(a-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = a(a-1)^3
\end{aligned}
$$

となることがわかる。

$$|A| \neq 0 \iff \operatorname{rank} A = 4$$

であるから、

• $a \neq 0, 1$ のとき $\dim W = 4 - 4 = 0$ である。

• $a = 0$ のとき、A にガウスの消去法の前進部分に相当するアルゴリズムを適用して階段型にして階数を計算すると、$\operatorname{rank} A = 3$ であることがわかる。したがって、$\dim W = 4 - 3 = 1$ である。

• $a = 1$ のとき、A にガウスの消去法の前進部分に相当するアルゴリズムを適用して階段型にして階数を計算すると、$\operatorname{rank} A = 1$ であることがわかる。したがって、$\dim W = 4 - 1 = 3$ である。

以上より、

$$
\dim W = \begin{cases} 1 & (a = 0 \text{ のとき}) \\ 3 & (a = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (a \neq 0, 1 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

を得る。

線形代数２・第６回 (2024 年 10 月 31 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第６回学習内容チェックシート 2024 年 10 月 31 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の与えられたベクトルの各組は「一次独立」「一次従属」のどちらに当てはまるか？当てはまる方を○で囲みなさい。さらに、その理由を下の欄に書きなさい。

(1) $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbb{R}^3$ の 3 個の列ベクトル “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は $\begin{cases} \text{一次独立である。} \\ \text{一次従属である。} \end{cases}$

(理由)

(2) $\mathbb{R}^3$ における 4 個の列ベクトル “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$” は $\begin{cases} \text{一次独立である。} \\ \text{一次従属である。} \end{cases}$

(理由)

Q2. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
$\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の次元とは？	p.	

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W に対して、その次元を記号 $\boxed{}$ で表わす。
  例えば、$\dim \mathbb{R}^n = \boxed{}$, $\dim\{\mathbf{0}\} = \boxed{}$ である。
- $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W について、$\dim W$ が取り得る値は $\boxed{}$ であり、
  $$\dim W = 0 \iff W = \boxed{},$$
  $$\dim W = n \iff W = \boxed{}$$
  が成立する。
- $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W について、
  - $\dim W = 0$ となるのは $W = \boxed{}$ のときであり、
  - $\dim W = 1$ となるのは W が $\boxed{}$ のときであり、
  - $\dim W = 2$ となるのは W が $\boxed{}$ のときであり、
  - $\dim W = 3$ となるのは $W = \boxed{}$ のときである。
- (m, n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間を W とおく。このとき、W の次元は A の階数がわかれば、公式
  $$\boxed{}$$
  を使って計算することができる。

Q4. 第 6 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。