§6. 指数関数

この節では、指数法則と指数関数について復習し、指数関数が微分可能であることを示す。

● 6 - 1 : 有理数による冪

a を 0 でない実数とする。このとき、整数 n に対して a^n は次のように定義されるのであった：

(6 - 1 a)
$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n\ \text{個}} & (n > 0), \\ 1 & (n = 0), \\ \overbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a}}^{-n\ \text{個}} & (n < 0). \end{cases}$$

さらに、$a > 0$ のとき、有理数 $r = \frac{m}{n}$ (m, n は整数、$n \geq 1$) に対して a の r 乗 a^r が次のように定義される：

(6 - 1 b)
$$a^r = (a^{\frac{1}{n}})^m.$$

有理数の分数表示は沢山あるが、そのどれをとっても (6 - 1 b) の右辺は同じ値を定めることに注意する。これは、$n, l \geq 1$ を満たす整数 k, l, m, n に対して、

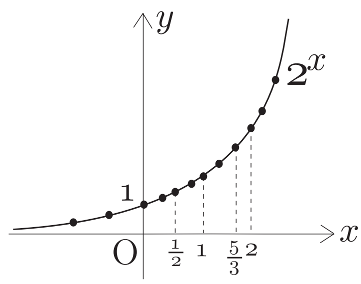
(6 - 1 c)
$$\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \quad \Rightarrow \quad (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{l}})^k$$

が成り立つ、という事実に基づく (この事実は両辺の nl 乗を比較すれば示せる)。

● 6 - 2 : 指数関数と指数法則

指数関数は連続関数 (実は微分可能でもある) の重要な例である。ここで、定義を簡単に復習しておこう。

a を正の実数とし、各有理数 r を入力すると a^r を出力する関数 $g(r) = a^r$ を考える。この関数は有理数の上で “とびとび” にしか定義されていないが、実は、$\mathbb{R}$ 上で連続となるように、有理数と有理数の隙間の実数 (= 無理数) に対しても、関数の値を埋めることができる。このようにして得られる $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数を $\exp_a(x)$ または a^x ($x \in \mathbb{R}$) と表わし、a を底とする**指数関数**という。具体的には、「a の x 乗」a^x は、x に収束するような有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 1 つとり、



(6 - 2 a)
$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}$$

と定めることにより定義される。

指数関数は次の性質を持つ (証明は実数の定義に本質的に関わるので、ここでは略す)。

定理 6 - 2 - 1

$a > 0,\ b > 0$ について、

(i) 指数関数 $\exp_a(x) = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$) は連続であり、$a^1 = a$.

(ii) (**指数法則**) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$① \ a^{x+y} = a^x a^y \qquad ② \ (a^x)^y = a^{xy} \qquad ③ \ (ab)^x = a^x b^x.$$

(iii) (**単調性**) $a > 1$ のとき、$x < y \implies a^x < a^y$,
$0 < a < 1$ のとき、$x < y \implies a^y < a^x$.

(iv) (**正値性**) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$a^x > 0$.

上の定理から次の結果が導かれる。

定理 6 - 2 - 2

$0 < a < b$ とする。

(1) $x > 0$ ならば、$a^x < b^x$ である。

(2) $x < 0$ ならば、$a^x > b^x$ である。

(**証明**)

(1) $b = a \cdot \dfrac{b}{a}$ と書けて、$\dfrac{b}{a} > 1$ である。よって、指数法則③と指数関数の単調性と正値性より、

$$b^x = a^x \left(\frac{b}{a}\right)^x > a^x \left(\frac{b}{a}\right)^0 = a^x \cdot 1 = a^x$$

を得る。(2) は (1) を $-x$ に対して適用すれば得られる。 □

例 6 - 2 - 3 3 つの実数 $2^{\frac{7}{2}}$, $3^{\sqrt{2}}$, $3^{\frac{7}{5}}$ の間に次の大小関係が成り立つ：

$$3^{\frac{7}{5}} < 3^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{7}{2}}.$$

実際、$\dfrac{7}{5} < \sqrt{2}$ である (これは両辺を自乗すればわかる) から、$3 > 1$ より、$3^{\frac{7}{5}} < 3^{\sqrt{2}}$ である。また、$\sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$ より $3^{\sqrt{2}} < 3^{\frac{3}{2}}$ であり、$(3^{\frac{3}{2}})^2 = 3^3 = 27 < 128 = 2^7 = (2^{\frac{7}{2}})^2$ であるから、$3^{\sqrt{2}} < 3^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{7}{2}}$ である。 □

補題 6 - 2 - 4

$x, a \in \mathbb{R}$ とし、$a > 0$ とする。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正の数からなる数列であって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすものとする。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^x = a^x$ が成り立つ。

(**証明**)

$x = 0$ のときは明らかに成り立つから、以下、$x \neq 0$ として証明する。

$\varepsilon > 0$ を $0 < \varepsilon < a^x$ を満たすように任意に与えて

$$b := (a^x - \varepsilon)^{\frac{1}{x}}, \qquad c := (a^x + \varepsilon)^{\frac{1}{x}}$$

とおく。すると、$b^x < a^x < c^x$ が成り立つ。

● $x > 0$ ならば、[定理 6 - 2 - 2(1)] より $b < a < c$ でなければならない。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、十分大きな n に対して $b < a_n < c$ となる。再び [定理 6 - 2 - 2(1)] より $a^x - \varepsilon = b^x < (a_n)^x < c^x = a^x + \varepsilon$ となる。よって、十分大きな n に対して $-\varepsilon < (a_n)^x - a^x < \varepsilon$ となるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^x = a^x$ が成り立つ。

● $x < 0$ ならば、$y = -x$ とおき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a_n)^y} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^y} = \frac{1}{a^y} = a^x$ を得る。 □

● 6-3： e^x の値

底がネイピア数 e の場合には、e^x の値は次の補題のような数列の極限で表わされる。

補題 6-3-1

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

(6-3 a) $$e^x = \lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^n.$$

(証明)

• $x=0$ の場合：$e^0 = 1 = \lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{0}{n}\Bigr)^n$ となり、(6-3 a) は成立する。

• $x>0$ の場合：$h \geq 1$ に対して $m=m(h)$ を h を超えない最大の自然数とする。すると、$m \leq h < m+1$ が成り立つから

$$1+\frac{1}{m} \geq 1+\frac{1}{h} > 1+\frac{1}{m+1}$$

となる。[定理 6-2-1](iii) より、

(☆1) $$\Bigl(1+\frac{1}{m}\Bigr)^{m+1} \geq \Bigl(1+\frac{1}{h}\Bigr)^{m+1} > \Bigl(1+\frac{1}{h}\Bigr)^{h} \geq \Bigl(1+\frac{1}{h}\Bigr)^{m} > \Bigl(1+\frac{1}{m+1}\Bigr)^{m}$$

となる。よって、

(☆2) $$\biggl(\Bigl(1+\frac{1}{m}\Bigr)^{m+1}\biggr)^x \geq \biggl(\Bigl(1+\frac{1}{h}\Bigr)^{h}\biggr)^x \geq \biggl(\Bigl(1+\frac{1}{m+1}\Bigr)^{m}\biggr)^x$$

が成り立つ。ここで、$h \to +\infty$ とすると $m=m(h) \to +\infty$ となり、

$$\lim_{m\to\infty}\Bigl(1+\frac{1}{m}\Bigr)^{m+1} = e, \qquad \lim_{m\to\infty}\Bigl(1+\frac{1}{m+1}\Bigr)^{m} = e$$

であるから、[補題 6-2-4] より (☆2) の両端は e^x に収束する。はさみうちの原理より (☆2) の中央も $h \to +\infty$ のとき e^x に収束する。

今、自然数 n に対して実数 h を $n = xh$ により定めると、$n\to\infty$ のとき $h \to +\infty$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^n = \lim_{h\to+\infty}\Bigl(1+\frac{1}{h}\Bigr)^{hx} = \lim_{h\to+\infty}\biggl(\Bigl(1+\frac{1}{h}\Bigr)^{h}\biggr)^x = e^x$$

を得る。

• $x<0$ の場合：(☆1) と同様に

(★) $$\Bigl(1-\frac{1}{m}\Bigr)^{m} \leq \Bigl(1-\frac{1}{h}\Bigr)^{h} < \Bigl(1-\frac{1}{m+1}\Bigr)^{m+1}$$

が成り立つことがわかる。$\lim_{m\to\infty}\Bigl(1-\frac{1}{m}\Bigr)^{m} = \lim_{m\to\infty}\Bigl(1-\frac{1}{m+1}\Bigr)^{m+1} = e^{-1}$ と [補題 6-2-4] を用いて、$\lim_{h\to+\infty}\biggl(\Bigl(1-\frac{1}{h}\Bigr)^{h}\biggr)^{-x} = (e^{-1})^{-x} = e^x$ がわかる。よって、自然数 n に対して実数 h を $n=-xh$ により定めることにより、$\lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^n = \lim_{h\to+\infty}\biggl(\Bigl(1-\frac{1}{h}\Bigr)^{h}\biggr)^{-x} = e^x$ を得る。 □

● 6-4： 指数関数の微分可能性

e をネイピア数とする。

定理 6-4-1

関数 e^x $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能で、$(e^x)' = e^x$ である。

この定理は次の補題を使って証明される。

補題 6 - 4 - 2
$0 < |x| < 1$ のとき、$1 - |x|e \leq \dfrac{e^x - 1}{x} \leq 1 + |x|e.$

(**証明**)

$|x| < 1$ のとき、

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x^{k-2}}{n^k}\right) \leq 1 + x + x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n^k}\right)$$
$$\leq 1 + x + x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 1 + x + x^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

となる。$n \to \infty$ とすると、[補題 6 - 3 - 1] より次を得る。

(◇) $$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 1 + x + x^2 e.$$

- $0 < x < 1$ のとき、(◇) から

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + xe = 1 + |x|e$$

を得る。また、$\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ より、

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}(1 + x) = 1 + x$$

であるから、

$$1 - |x|e \leq 1 \leq \frac{e^x - 1}{x}$$

である。

- $-1 < x < 0$ のとき、$y = -x$ とおくと $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^y - 1}{y} \cdot \dfrac{1}{e^y}$ となる。ここで、$0 < y < 1$ であるから $1 < e^y$ となることと先ほど得た不等式を用いて

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \frac{1}{e^y} < \frac{e^y - 1}{y} \leq 1 + |y|e = 1 + |x|e$$

を得る。また、(◇) から

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq 1 + xe = 1 - |x|e$$

も得る。 □

(**[定理 6 - 4 - 1] の証明**)

$a \in \mathbb{R}$ を任意にとり、a で関数 e^x が微分可能であることを示す。任意の実数 h $(\neq 0)$ に対して、指数法則から

$$\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \frac{e^h - 1}{h}$$

と書ける。ここで、[補題 6 - 4 - 2] より $\dfrac{e^h - 1}{h} \to 1 \quad (h \to 0)$ であるから、

$$\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \frac{e^h - 1}{h} \ \to\ e^a \cdot 1 = e^a \quad (h \to 0)$$

を得る。よって、関数 e^x は a で微分可能であり、a における微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a$ である。 □

2026 年 5 月 14 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 6 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
0 でない実数 a と整数 n に対して a^n とは？	p.	
正の実数 a と有理数 r に対して a^r とは？	p.	
正の実数 a と実数 x に対して a^x とは？	p.	
正の実数 a を底とする指数関数とは？	p.	

Q2. 指数関数が持っている性質を列挙しなさい ($a > 0,\ b > 0$ を前提に書いて構いません)。

- (連続性と初期条件) $\boxed{}$
- (指数法則) $\boxed{}$
- (単調性) $\boxed{}$
- (正値性) $\boxed{}$

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な記号や数字を入れなさい。

- $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{3}{4}} = (6^2)^{\boxed{}}$ である。
- 3 つの実数 $2^{\frac{1}{4}},\ 3^{\frac{1}{6}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{12}}$ の大小を比較すると $\boxed{}$ である。
- e をネピアの数とする。
  - 指数関数 e^x $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能であり、その導関数は次式で与えられる：
  $$(e^x)' = \boxed{}.$$
  - 任意の実数 x に対して e^x は次のような数列の極限として与えられる：
  $$e^x = \lim_{n\to\infty} \boxed{}.$$

Q4. 第 6 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。