§6. 全微分

前節で導入された偏微分は、本質的に１変数の微分であり、２変数のそれではない。1 変数関数に対する微分の概念に対応する 2 変数関数に対する概念は全微分と呼ばれるものが対応する。ここでは、まず、1 変数関数の微分の定義を反省し、それを真似る形で全微分を導入する。次に、全微分可能な関数は連続かつ偏微分可能であることを示し、最後に、全微分可能であることの幾何学的意味を説明する。

● 6 - 1 ： 全微分可能

1 変数関数に対する微分可能であるという概念を 2 変数関数に対して拡張したい。ここでは、その方法について考察しよう。まず、1 変数関数が微分可能であるとはどうことであったかを思い出そう。

$f(x)$ を開区間 I 上で定義された 1 変数関数とする。$f(x)$ が $a \in I$ において微分可能であるとは、極限

(6 - 1 a)
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するときを言うのであった。この極限を α とおき、

$$o(h) = f(a+h) - f(a) - \alpha h$$

とおくと、次の言い換えが成立する：

(6 - 1 b) $f(x)$ が a で微分可能 $\iff$
$$\left(\begin{array}{c} 0 \text{ に十分近い任意の実数 } h \text{ について、} \\ f(a+h) - f(a) = \alpha h + o(h) \\ \text{となるような実数 } \alpha \text{ と } \lim_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0 \text{ となる} \\ 0 \text{ の十分近くで定義された関数 } o(h) \text{ が存在する} \end{array} \right)$$

この言い換えを基礎にして、２変数関数が全微分可能であるということを定義しよう。

定義 6 - 1 - 1

領域 D 上で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で**全微分可能**であるとは、0 に十分近い任意の実数 h, k について、

(6 - 1 c)
$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \alpha h + \beta k + o(h,k)$$

となるような実数 α, β と $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \dfrac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ となる $(0,0)$ の十分近くで定義された関数 $o(h,k)$ が存在するときをいう。

f がすべての点 $(a,b) \in D$ で全微分可能なとき、f は D 上で全微分可能、あるいは単に、f は全微分可能であるという。

注意 6 - 1 - 2　全微分可能であることを、単に、**微分可能**と呼ぶことがある。すなわち、

全微分可能 ＝ 微分可能

例 6 - 1 - 3 関数 $p(x,y)=x\ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ は点 (a,b) で全微分可能である。実際、任意の $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$p(a+h,b+k)-p(a,b)=(a+h)-a=h \qquad (h,k\in\mathbb{R})$$

となるから、(6 - 1 c) における $\alpha,\beta,o(h,k)$ として、$\alpha=1,\beta=0,\ o(h,k)=0$ をとることができる。

同様にして、関数 $q(x,y)=y\ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ も全微分可能なことがわかり、$c\in\mathbb{R}$ への定値関数 $\underline{c}(x,y)=c\ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ もまた全微分可能なことがわかる。 □

● 6 - 2 : 関数の和差積商と全微分可能性

補題 6 - 2 - 1

D 上の関数 $f(x,y),\ g(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で全微分可能ならば、４つの関数

$$f(x,y)+g(x,y),\quad f(x,y)-g(x,y),\quad f(x,y)g(x,y),\quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

も (a,b) で全微分可能である。但し、４番目の商についてはすべての $(x,y)\in D$ について $g(x,y)\neq 0$ を仮定する。

(**証明**)

$f(x,y),\ g(x,y)$ は $(a,b)\in D$ で全微分可能なので、十分小さな実数 h,k に対して

(6 - 2 a) $$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\alpha_1 h+\beta_1 k+o_1(h,k),$$

(6 - 2 b) $$g(a+h,b+k)-g(a,b)=\alpha_2 h+\beta_2 k+o_2(h,k),$$

(6 - 2 c) $$\Big(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R},\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{o_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{o_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0\Big)$$

のように表わされる。ここでは、積と商について示す (和と差については演習問題とする)。

- 積について：$F(x,y)=f(x,y)g(x,y)$ とおくと、

$$\begin{aligned}F(a+h,b+k)-F(a,b)&=(\alpha_1 g(a,b)+\alpha_2 f(a,b))h+(\beta_1 g(a,b)+\beta_2 f(a,b))k\\&\quad+\alpha_1\alpha_2 h^2+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)hk+\beta_1\beta_2 k^2+o_1(h,k)o_2(h,k)\\&\quad+(g(a,b)+\alpha_2 h+\beta_2 k)o_1(h,k)+(f(a,b)+\alpha_1 h+\beta_1 k)o_2(h,k)\end{aligned}$$

となる。波線部分を $o(h,k)$ とおく。

$$\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=|h|\cdot\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le|h|,\qquad \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=|k|\cdot\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le|k|$$

であるから、

(6 - 2 d) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

である。また、

$$\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\le|h|\cdot\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le|h|$$

であるから、

(6 - 2 e) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

である。(6 - 4 c),(6 - 2 d),(6 - 2 e) より、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

がわかるから、関数 $F(x,y) = f(x,y)g(x,y)$ は (a,b) で全微分可能である。

• 商について：$\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = f(x,y)\cdot\dfrac{1}{g(x,y)}$ と書けるから、$G(x,y) = \dfrac{1}{g(x,y)}$ が (a,b) で全微分可能なことを示せばよい。

$$o(h,k) = G(a+h,b+k) - G(a,b) + \frac{\alpha_2}{g(a,b)^2}h + \frac{\beta_2}{g(a,b)^2}k$$

とおくと、

$$o(h,k) = \frac{\alpha_2^2h^2 + 2\alpha_2\beta_2hk + \beta_2^2k^2 + (\alpha_2h+\beta_2k - g(a,b))o_2(h,k)}{g(a,b)^2g(a+h,b+k)}$$

となるので、(6 - 4 c),(6 - 2 d),(6 - 2 e) より、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

がわかる。よって、$G(x,y) = \dfrac{1}{g(x,y)}$ は (a,b) で全微分可能である。 □

例 6 - 2 - 2　[例 6 - 1 - 3] と [補題 6 - 2 - 1] より関数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ は全微分可能である。 □

● 6 - 3 : 全微分可能性と連続性・偏微分可能性

全微分可能の定義から、直ちに次の結果が従う。

定理 6 - 3 - 1

領域 D 上で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)\in D$ で全微分可能ならば、(a,b) で連続、かつ、偏微分可能である。さらに、(6 - 1 c) における α,β は偏微分係数に一致する、つまり、h,k が 0 に十分近いとき、$f(a+h,b+k) - f(a,b)$ は

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + o(h,k) \tag{6 - 3 a}$$
$$\Big(\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\Big)$$

と表わされる。

(**証明**)

ここでは、後半の主張のみを示す。

(6 - 1 c) より、

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\alpha h+\beta\cdot0+o(h,0)}{h} = \lim_{h\to0}\Big(\alpha+\frac{o(h,0)}{h}\Big) = \alpha$$

となる。これは、関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で x に関して偏微分可能であり、その偏微分係数が $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \alpha$ で与えられることを意味している。同様に、$f(x,y)$ は点 (a,b) で y に関して偏微分可能であり、その偏微分係数は $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \beta$ で与えられることがわかる。 □

注意 6 - 3 - 2　偏微分可能であっても全微分可能とは限らないが、偏導関数が連続であれば全微分可能になる (教科書 p.79, 定理 4.2 を参照)。

● 6 - 4 ： 全微分可能の幾何学的意味

領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)\in D$ で全微分可能であることの幾何学的意味を考えよう。$f(x,y)$ のグラフが定める曲面を M とおく。

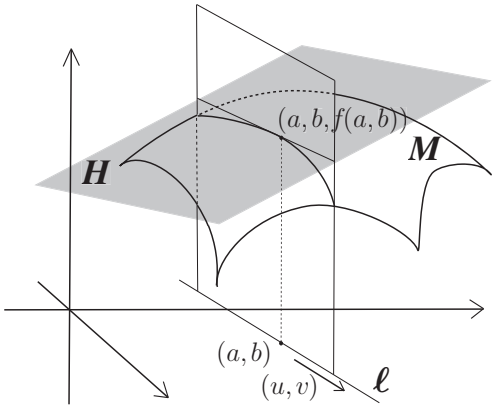
平面 $\mathbb{R}^2$ において、点 (a,b) を通り (u,v) を方向ベクトルとする直線

$$\ell:\ (x,y)=t(u,v)+(a,b)\qquad (t\in\mathbb{R})$$

を考え、この直線を含み z-軸に平行な平面による M の切り口 M_ℓ を考える。関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能ならば、切り口 M_ℓ に現れる曲線に接線が存在する。

$$\lim_{t\to0}\frac{f(a+tu,b+tv)-f(a,b)}{t}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v$$

であるから、その接線の式は次で与えられる：



$$(x,y,z)=t\Big(u,v,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v\Big)+(a,b,f(a,b))\qquad (t\in\mathbb{R}).\tag{6 - 4 a}$$

(u,v) をあらゆる方向に選んで、切り口 M_ℓ に表われる曲線の $\mathrm{A}(a,b,f(a,b))$ における接線上の点をすべて集めて、H を作る。H は点 A において M に接する平面である。この平面の方程式は次式で与えられる：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)-z+f(a,b)=0.\tag{6 - 4 b}$$

実際、切り口 M_ℓ に現れる曲線の $(a,b,f(a,b))$ における接線上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ は、(6 - 4 a) より

$$z-f(a,b)=t\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v\Big)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

を満たしているから、(6 - 4 b) が成り立つ。(6 - 4 b) は内積 $\cdot$ を用いると、

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\Big)\cdot(x-a,y-b,z-f(a,b))=0\tag{6 - 4 c}$$

と表わされる。これは、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(x-a,y-b,z-f(a,b))$ がベクトル $\boldsymbol{a}=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\Big)$ と直交することを意味している。したがって、H は (x,y,z)-座標空間の中で点 A を通り、ベクトル $\boldsymbol{a}$ に垂直な平面を表わす。

以上の考察から、(a,b) において関数 $f(x,y)$ が全微分可能であるとは、幾何学的には、点 $(a,b,f(a,b))$ において M に接する平面が存在することであると言える。

定義 6 - 4 - 1

領域 D 上で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)\in D$ で全微分可能なとき、方程式 (6 - 4 b) によって表わされる (x,y,z)-空間内の平面を、方程式 $z=f(x,y)$ が定める曲面の点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**と呼ぶ。

例 6 - 4 - 2 関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2<1)$ に対して、方程式 $z=f(x,y)$ が定める曲面の点 $\Big(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\Big)$ における接平面の方程式は $-1\Big(x-\frac{1}{\sqrt3}\Big)-1\Big(y-\frac{1}{\sqrt3}\Big)-z+\frac{1}{\sqrt3}=0$, すなわち、$x+y+z-\sqrt3=0$ である。 □

2026 年 10 月 29 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第 6 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で (全) 微分可能であるとは？	p.	

Q2. 次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$ のような、$\frac{(多項式)}{(多項式)}$ の形で与えられる関数 $f(x,y)$ が全微分可能であることを示すには？	

Q3. 次の $\square$ に適当な言葉や数式を入れなさい。

- 全微分可能な関数は $\square$ であり、かつ、$\square$ であるから、連続でない関数や偏微分可能でない関数は決して全微分可能にはなり得ない。
- 領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能なとき、十分 0 に近い h,k に対して $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ は、偏微分係数を用いて、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \square\, h + \square\, k + o(h,k) \quad \left(\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\right)$$

のように表わされる。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるということは、幾何学的には、方程式 $z=f(x,y)$ により定まる (x,y,z)-座標空間内の曲面が点 $(a,b,f(a,b))$ において $\square$ を有することを意味し、それは方程式

$$\square$$

によって表わされる。

Q4. 第 6 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。