§7. 多項式の定義と次数

高校では文字を含んだ式のことを整式と呼ぶことが多かったかもしれないが、大学では多項式と呼ぶ方が一般的である。この節では、多項式の定義とその演算 (和と積) の定義を再確認する。多項式と関数 (写像) との違いを明確に捉えることが主テーマである。

この節以降、しばらくは $\mathbb{K}$ は体を表わす。

● 7-1：１変数多項式の定義

文字 X を**不定元** (indeterminate) とする $\mathbb{K}$-係数**多項式** (polynomial) とは、

$$2+X, \quad 1+(-3)X+X^2, \quad 1+(-1)X+X^2+(-1)X^3$$

のように、0 以上のある整数 d と $\mathbb{K}$ の元 $a_0, a_1, \ldots, a_d$ により

(7-1 a) $$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$$

の形に表わされる‘式’のことをいう。ここで記号 $+$ が使われているが、この段階では $+$ は単なる形式的な記号であって、「和」の意味はない。このことは、多項式 (7-1 a) は有限数列 “$a_0, a_1, \ldots, a_d$” と実質的に同じものであるということを意味している。

(7-1 a) の多項式を f とおくとき、$a_i \in \mathbb{K}$ $(0 \leq i \leq d)$ を多項式 f における X^i の**係数** (coefficient)、あるいは単に、係数という。a_0 は**定数項**とも呼ばれる。便宜上、$i > d$ を満たす任意の整数 i に対して、f における X^i の係数を 0 と定める。このように約束することにより、f における X^i の係数が 0 以上のすべての整数 i について定義される。

注意 1：(7-1 a) において $d = 0$ の場合は、単に a_0 となる。これも多項式である。このような多項式を定数多項式と呼ぶ。

注意 2：多項式 (7-1 a) を $\sum_{i=0}^{d} a_iX^i$ のように書くことがある。ここで用いられている和の記号 $\sum$ も、「+」と同様に、形式和を表わしている。

注意 3：(7-1 a) は、正確には

$$a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$$

のように書かれるべきものである。記号が繁雑になることを避けるために、X^0 を略し、X^1 を X と略記している。

注意 4：aX^i $(a \in \mathbb{K},\ 0 \leq i \in \mathbb{Z})$ という形の‘式’を**単項式** (monomial) と呼ぶ。多項式とは単項式 a_iX^i $(0 \leq i \leq d)$ を $+$ という記号でつなげて表わされる式のことである、と言い換えることができる。単項式 $1X^i$ を単に X^i と略記する。

注意 5：$1-3X+X^2$ のように、多項式の表記において、単項式 a_iX^i のいくつかを「$-$」でつなげた表記も許すことにする。「$-$」でつなげた部分は $+(-a_i)X^i$ のように解釈する。例えば、$1-3X+X^2$ は $1+(-3)X+X^2$ という多項式を表わしていると読み替える。

注意 6：多項式 f の不定元が X であることを強調したいときには $f(X)$ という表記を使う。この表記では X を f で写した像のように見えてしまうので、注意が必要である。多項式はあくまでも式であって、関数（写像）ではない。

● 7 - 2 : 多項式の相等

X を不定元とする２つの $\mathbb{K}$-係数多項式

$$f := a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d,$$
$$g := b_0 + b_1X + \cdots + b_{d'}X^{d'}$$

が**等しい**とは、0 以上のすべての整数 i について、f における X^i の係数と g における X^i の係数が等しい、すなわち、$a_i = b_i$ となるときをいう (但し、$i > d,\ j > d'$ である i, j に対しては $a_i = 0,\ b_j = 0$ と約束する)。多項式 f, g が等しいことを $f = g$ と書き表わす。

この約束により、係数がすべて 0 であるような多項式 $0 + 0X + 0X^2 + \cdots + 0X^d$ はいずれも定数多項式 0 （つまり、$0X^0$ という多項式）に等しいことがわかる。

X を不定元とする $\mathbb{K}$-係数多項式の全体からなる集合を $\mathbb{K}[X]$ という記号で表わす：

$$\mathbb{K}[X] = \{\ a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{K},\ d \in \mathbb{Z},\ d \geq 0\ \}.$$

● 7 - 3 : 多項式の和

２つの多項式 $f, g \in \mathbb{K}[X]$ に対して、各 X^i $(i \geq 0)$ の係数の和をとって、新しい多項式 $f \boldsymbol{+} g \in \mathbb{K}[X]$ を作ることができる。この多項式 $f \boldsymbol{+} g$ を f と g の**和**という。

例 7 - 3 - 1 ２つの多項式 $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ g = b_0 + b_1X + b_2X^2$ に対して、

$$f \boldsymbol{+} g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + a_3X^3.$$

多項式 $f, g \in \mathbb{K}[X]$ を $f = \sum_{i=0}^{d} a_iX^i,\ g = \sum_{i=0}^{d'} b_iX^i$ $(a_i, b_i \in \mathbb{K})$ と表わすと、$f \boldsymbol{+} g$ は次のように書くことができる：

$$f \boldsymbol{+} g = \sum_{i=0}^{\max\{d,d'\}} (a_i + b_i)X^i.$$

ここで、$i > d,\ j > d'$ である i, j に対しては $a_i = 0,\ b_j = 0$ とおいている。

$\mathbb{K}[X]$ における和 $\boldsymbol{+}$ は結合法則、交換法則を満たすことが簡単に確かめられる。

単項式 aX^i $(a \in \mathbb{K},\ i \geq 0)$ を $0 + 0X + \cdots + 0X^{i-1} + aX^i$ という $\mathbb{K}$-係数多項式と同一視すれば、多項式として

$$a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1} + a_dX^d = a_0 \boldsymbol{+} a_1X \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} a_{d-1}X^{d-1} \boldsymbol{+} a_dX^d$$

となることがわかる。これは、最初に多項式を定義するために使った記号 $+$ を後から定義した多項式の和 $\boldsymbol{+}$ と考えてよい、ということを意味している。そこで、以後、$+$ に太字の $\boldsymbol{+}$ の意味も持たせることにして、太字の $\boldsymbol{+}$ を使わないことにしよう。

● 7 - 4 : 多項式の差

$\mathbb{K}$-係数多項式 $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ $(a_i \in \mathbb{K},\ i = 0, 1, \ldots, n)$ に対して

$$-f := (-a_0) + (-a_1)X + \cdots + (-a_n)X^n$$

とおくと、$f + (-f) = 0 = (-f) + f$ が成立する。これを用いて、$f, g \in \mathbb{K}[X]$ に対して、$f - g \in \mathbb{K}[X]$ を

$$f - g := f + (-g)$$

と定義し、これを f から g を引いた**差**という。

例 7-4-1 $\mathbb{Q}$-係数多項式 $f = -1 + X + 3X^2,\ g = 1 - 2X + 4X^2 + 7X^3$ に対して、

$$f - g = (-1 + X + 3X^2) + (-1 + 2X - 4X^2 - 7X^3) = -2 + 3X - X^2 - 7X^3.$$

● 7-5：多項式の積

X を不定元とする $\mathbb{K}$-係数多項式の全体 $\mathbb{K}[X]$ には、次の 2 条件を満たすような積（= 二項演算）が一意的に定義される。

(i) 分配法則が成り立つ。すなわち、任意の $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$ に対して、

$$f(g+h) = fg + fh, \quad (f+g)h = fh + gh.$$

(ii) 単項式同士の積は次で与えられる：

$$aX^i \cdot bX^j = abX^{i+j}.$$

例 7-5-1 2 つの多項式 $f = a_0 + a_1X + a_2X^2,\ g = b_0 + b_1X + b_2X^2$ の積 fg は、上の (i) と (ii) を繰り返し用いることにより、

$$\begin{aligned} fg &= (a_0 + a_1X + a_2X^2)(b_0 + b_1X + b_2X^2) \\ &= a_0 \cdot (b_0 + b_1X + b_2X^2) + a_1X \cdot (b_0 + b_1X + b_2X^2) + a_2X^2 \cdot (b_0 + b_1X + b_2X^2) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)X^3 + a_2b_2X^4 \\ &= \sum_{k=0}^{4}(\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i})X^k \end{aligned}$$

であることがわかる。但し、最後の式では $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0$ と約束している。 □

上の例と同様の計算により、一般に、2 つの多項式 $f = \sum_{i=0}^{m} a_iX^i,\ g = \sum_{i=0}^{n} b_iX^i$ に対して、その積は

$$fg = \Bigl(\sum_{i=0}^{m} a_iX^i\Bigr)\Bigl(\sum_{j=0}^{n} b_jX^j\Bigr) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_ib_jX^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)X^k$$

によって与えられることがわかる。但し、$i > m$ に対して $a_i = 0$、$j > n$ に対して $b_j = 0$ と定め、和 $\sum_{i+j=k}$ は $i + j = k$ かつ $0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n$ となるようなすべての整数の組 (i, j) にわたってとる。

多項式の積は交換法則、結合法則を満たすことが確かめられる。そして、$\mathbb{K}[X]$ は上で定義した和と積に関して可換環をなすことがわかる。

演習 7-1* $\mathbb{R}$-係数多項式として

$$1 + X + 2X^2 + 3X^3 = a1 + b(X-1) + c(X-1)^2 + d(X-1)^3$$

となるような $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を求めよ。

演習 7-2* すべての自然数 n について次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$(X+1)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}X^r \qquad \text{但し、}\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

● 7 - 6 : 多項式の次数

多項式は整数とよく似た性質を持っている。例えば、割り算を考えることはできないが、簡約法則が成り立ったり、商や余りを考えることができる。これらのことに関して重要な役割を果たすのが、次数という概念である。

0 でない多項式 $f \in \mathbb{K}[X]$ は、ある整数 $n \geq 0$ と $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K},\ a_n \neq 0$ を用いて、

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

のように一意的に書き表わすことができる。このとき、f を n 次（多項）式と呼ぶ。また、n を f の**次数** (degree) といい、これを $\deg f$ という記号で表わす。a_n を f の**最高次係数** (leading coefficient) という。

注意 1：0 の次数を便宜的に $-\infty$ と定めて、すべての整数 n について $-\infty < n$ と約束する流儀もあるが、この授業では未定義にしておく。

注意 2：$n \geq 0$ を整数とするとき、多項式 f が**高々** n **次式**であるとは、$f = 0$ であるか、または $0 \leq m \leq n$ を満たすある整数 m について f が m 次式であるときをいう。

補題 7 - 6 - 1

2 つの多項式 $f, g \in \mathbb{K}[X]$ がどちらも 0 でないならば、積 $fg \in \mathbb{K}[X]$ も 0 でない。さらに、次数に関して次の等式が成り立つ。

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

(**証明**)

$f, g \in \mathbb{K}[X]$ を $f \neq 0,\ g \neq 0$ とし、

$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \ (a_n \neq 0,\ a_i \in \mathbb{K}),$$

$$g = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m \ (a_m \neq 0,\ b_j \in \mathbb{K}).$$

と表わす。このとき、

$$fg = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + \cdots + a_n b_m X^{n+m} \tag{7-6 a}$$

となるので、X^{m+n} の係数は $a_n b_m$ である。$\mathbb{K}$ は体なので、簡約法則が成り立つ。よって、$a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$ より $a_n b_m \neq 0$ を得る。したがって、$fg \neq 0$ である。また、(7 - 6 a) および $a_n b_m \neq 0$ より、$\deg(fg) = m + n = \deg f + \deg g$ である。 □

演習 7- 3　$fg = 1$ を満たす $f, g \in \mathbb{K}[X]$ は定数多項式であることを示せ。

$\mathbb{K}[X]$ は割り算に関して閉じていない (つまり、多項式を多項式で割っても一般には多項式にならない)。しかしながら、上の補題の前半部分より、次の簡約法則の成立がわかる。

系 7 - 6 - 2 ($\mathbb{K}[X]$ における簡約法則)

3 つの多項式 $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$ について次が成り立つ。

$$fg = fh,\ f \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g = h.$$

演習 7- 4* [補題 7 - 6 - 1] の前半部分の主張の対偶を書き、上の系を証明せよ。