

§7. 行列式の定義とその性質

前々節の結果から、2次と3次の正方行列 A が正則かどうか(すなわち、逆行列を持つかどうか)を調べるには、数 $|A|$ が0でないかどうかを調べればよいことがわかっている。ここでは、その数 $|A|$ の性質を2次の場合、3次の場合に述べる。さらに、一般の n 次正方行列 A について、同様の性質を持つ数 $|A|$ をどのように定義すればよいかを説明する。

● 7-1 : 2次行列式

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$(7-1 a) \quad |A| = ad - bc$$

を A の行列式という。前々回に示したことから、

$$(7-1 b) \quad A \text{ が正則 (つまり、逆行列が存在)} \iff |A| \neq 0$$

が成立し、 $|A| \neq 0$ のとき、

$$(7-1 c) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。今、 A を係数行列とする連立一次方程式

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 2 \end{cases}$$

を考えると、これは $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表わされる。したがって、その解は、行列式を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d-2b \\ -c+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} & \frac{b}{|A|} \\ \frac{2}{|A|} & \frac{d}{|A|} \\ \frac{a}{|A|} & 1 \\ \frac{c}{|A|} & 2 \\ \frac{1}{|A|} & \frac{b}{|A|} \end{pmatrix}$$

と表わされる。右辺のベクトルの分子の行列式は、それぞれ $|A|$ において第1列、第2列を定数項ベクトルで置き換えた行列式になっていることに注意しよう。

● 7-2 : 行列式の基本的性質 (2次の場合)

2次正方行列の行列式は以下の性質を持つ。

(Det1) ある行の各成分を2つの数の和に分けると、行列式の値も和になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

(Det2) ある行を t 倍すると値は t 倍になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(Det3) 2つの行を入れ替えると符号が変わる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(Det4) 1つの行に他の行の t 倍を加えても、行列式の値は変わらない。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c+ta & d+tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(Det5) 行と列を入れ替えても値は変わらない。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

注意 1° : (Det2) と (Det3) から次がわかる。

(Det2)' ある行が全部 0 のとき値は 0 になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(Det3)' 2つの行が同じとき値は 0 になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

注意 2° : (Det5) により、(Det1), ..., (Det4) は「行」を「列」に変えても成立する。

例 7-2-1 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$ の行列式は

$$|A| \stackrel{\textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{2}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 + (-2) \cdot 7 & 9 + (-2) \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 7$$

のように計算することができる。

● 7-3 : 3次行列式

3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$(7-3 a) \quad |A| = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3$$

を A の**行列式**という。前々節で述べたように、

$$(7-3 b) \quad A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

が成立し、 $|A| \neq 0$ のとき、

$$(7-3 c) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_2 c_3 - c_2 b_3 & b_3 c_1 - c_3 b_1 & b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ c_2 a_3 - a_2 c_3 & c_3 a_1 - a_3 c_1 & c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ a_2 b_3 - b_2 a_3 & a_3 b_1 - b_3 a_1 & a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

である。これより、連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 3 \end{cases}$$

の解は行列式を用いて次のように表わされることがわかる。

$$(7-3 d) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 2 & c_2 \\ a_3 & 3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 2 \\ a_3 & b_3 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

● 7-4 : 行列式の基本的性質 (3次の場合)

3次正方行列の行列式についても、2次の場合と同様の性質 (Det1), ..., (Det5) が成り立つ。

(Det1) ある行の各成分を2つの数の和に分けると、行列式の値も和になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & b_1 + b'_1 & c_1 + c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Det2) ある行を t 倍すると値は t 倍になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} ta_1 & tb_1 & tc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Det3) 2つの行を入れ替えると符号が変わる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Det4) 1つの行に他の行の t 倍を加えても、行列式の値は変わらない。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ta_1 & b_2 + tb_1 & c_2 + tc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Det5) 行と列を入れ替えても値は変わらない。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

注意 1° : (Det2) と (Det3) から次がわかる。

(Det2)' ある行が全部 0 のとき値は 0 になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(Det3)' 2つの行が同じとき値は 0 になる。

$$(例) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

注意 2° : (Det5) により、(Det1), ..., (Det4) は「行」を「列」に変えても成立する。

$$例 7-4-1 \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{2} \times (-2) + \textcircled{3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{(第1列に足し上げる)}}{=} \begin{vmatrix} 1+2a & a & a \\ 1+2a & 1 & a \\ 1+2a & a & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \because (\text{Det4}) \text{ の列バージョンを用い} \\ \text{て、} \boxed{2} \times 1 + \boxed{1}, \boxed{3} \times 1 + \boxed{1} \text{ を行う。} \\ \boxed{i} \text{ は第 } i \text{ 列の意。} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{(第1列から } 1+2a \text{ を括り出す)}}{=} (1+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{2}}{=} \stackrel{\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{3}}{=} (1+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} \\ & = (1+2a)(1-a)^2. \quad (\because \text{サラスの方法で計算}) \end{aligned}$$

● 7-5 : 行列式の定義 (一般の場合)

2次行列式と3次行列式は独立に定義されたが、両者の間には密接な関係がある。

3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は(7-3 a)により定義されるが、(7-3 a)は

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

と書き換えられるから、3次行列式 $|A|$ は次のように2次行列式の交代和¹として表わされる:

$$|A| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

この事実を一般化して、4次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

と定義し、一般に、 $(n-1)$ 次正方行列 B に対して行列式 $|B|$ が定義されたとき、 n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を次式により定義する:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

n 次正方行列の行列式についても、2次の場合と同様の性質 (Det1), \dots , (Det5) が成り立つ。

¹交代和とは、+と-で交互につないだ和のことをいう。

線形代数1 事前練習用演習問題

pre7-1. (2次および3次の行列式)

次の各行列式を計算せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 22 & -13 \\ 44 & -39 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

pre7-2. (行列式の性質と因数分解)

行列式の計算の仕方を工夫して、次の等式を示せ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

$$(2) \begin{vmatrix} a+b+c & b & a+b \\ b+c & a+b+c & c \\ a & c+a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre7-1. [例7-2-1]と[例7-4-1(1)]を参照。

(1) 第1列から22を括り出し、第2列から-13を括り出して計算すると、

$$\begin{vmatrix} 22 & -13 \\ 44 & -39 \end{vmatrix} = 22 \cdot (-13) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -286.$$

(2) 行列式の性質 (Det4) を用いて、簡単にしてから、サラスの方法で計算する：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \times (-9) + \textcircled{3} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -28 & -22 \end{vmatrix} = \dots = 22.$$

pre7-2. [例7-4-1(2)]のように、主に行列式の性質 (Det2) を用いて因数分解する。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{3} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ a^3 & b^3 - a^3 & c^3 - a^3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3 & (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix} \\ = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c+a \\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}.$$

さらに、 $\textcircled{2} \times (-1) + \textcircled{3}$ を行なって第3列から $c-b$ を括り出し、行列式を計算すると、与えられた等式の右辺に一致することがわかる。

(2) 第2行、第3行を第1行に足しあげると、第1行から $2(a+b+c)$ を括り出すことができる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b+c & b & a+b \\ b+c & a+b+c & c \\ a & c+a & a+b+c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ b+c & a+b+c & c \\ a & c+a & a+b+c \end{vmatrix} \\ &= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+b+c & c \\ a & c+a & a+b+c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

① $\times (-1) + ②$, ① $\times (-1) + ③$ を行なって、行列式を計算することにより、与えられた等式の右辺に一致することがわかる。

線形代数1・第7回(2026年5月21日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 2 次の行列式が持つ代表的な性質を、下の表の第 1 行目を真似て、列挙しなさい。

性質	式による表現 (例)
ある行の各成分を 2 つの数の和に分けると、行列式の値も和になる。	$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$

Q2. 次の に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式は $|A| = \text{$ である。
- 任意の実数 a, b に対して、 $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \text{$, $\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = \text{$ である。
- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式は 2 次行列式の交代和として、次のように書き換えられる：

$$|A| = \text{} .$$

- 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ の行列式は 3 次の行列式の交代和として、

$$|A| = \text{$$

のように定義される。

Q3. 第 7 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。