§7. 行列から定まる線形写像

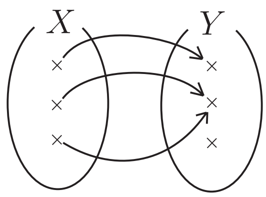
この節では、(m, n)-行列が与えられると、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像が定まることを示す。特に、$m = n = 2$ の場合に、この写像の性質を調べながら、線形写像の概念の理解を深める。まずは、写像に関する最小限の知識を身につけよう。

● 7 - 1 : 写像の定義

集合 X から集合 Y への**写像**とは、集合 X に属する各々の元に対して、集合 Y の元を 1 つずつ対応させる規則のことをいう。このような対応規則を f とおくとき、写像は記号で

$$f : X \longrightarrow Y \qquad \text{または} \qquad X \xrightarrow{f} Y$$

と書き表わされる。X を写像 f の**定義域**、Y を**終域**という。



写像 f の下で $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき、「x は f によって y に**写される**」あるいは「f は x を y に**写す**」といい、この y を $f(x)$ と書き表わす。$f(x)$ は f による x の**像**と呼ばれる。授業では

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Cup & & \Cup \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

のように書き表わすこともある。

例 7 - 1 - 1

(1) 集合 X の元の個数を数えるという行為は、X から自然数全体からなる集合 $\mathbb{N}$ への写像を作ることに他ならない。

(2) 関数 $f(x) = x^2$ や $f(x) = \sin(2\pi x)$ などは、実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と考えることができる。

(3) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が与えられると、2 次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、2 次元ベクトル $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ を対応させる写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が定義される。

一般論を展開する際の抽象的な議論では、「$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする」のように書かれることがよくある。このように書かれているときは、「X に属する各々の元 x に対して、Y のある元 (これを $f(x)$ で表わす) を対応させる規則が f によって (具体的に書かれてはいないけれども) 1 つ与えられている」と思う必要がある。しかし、写像を具体的に定義したいときには、定義域と終域とともに、元の対応規則も明記しなければならない。

例 7 - 1 - 2 実数の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像であって、各実数 x に対して、$2x - 1$ によって定まる実数を対応させる写像を定めたいときには、次のように書き表わす：

$$\text{写像 } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ を } f(x) = 2x - 1 \ \ (x \in \mathbb{R}) \text{ によって定義する。}$$

● 7-2：写像の相等

写像は次の３つを指定することにより定まる。

① 定義域となるべき集合 X,
② 終域となるべき集合 Y,
③ 定義域 X の中の各元に対して終域 Y の元を１つずつ定める対応規則.

そこで、２つの写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : X' \longrightarrow Y'$ が**等しい**ことを、次の３条件がすべて成り立つときであると定める。

❶ $X = X'$ (定義域が等しい),
❷ $Y = Y'$ (終域が等しい),
❸ すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (元の対応規則が等しい).

このとき、$f = g$ と書き表わす。等しくないときには、$f \neq g$ と書き表わす。

● 7-3：部分集合の像

$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする。X の部分集合 S に対して、Y の部分集合

(7-3 a) $$f(S) = \{\ f(s) \mid s \in S\ \}$$

を f による S の**像**と呼ぶ。これは s が S の中を自由に動き回るときの $f(s)$ の取りうる値の範囲を表わしている。

例 7-3-1 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義する。このとき、

$$f(\mathbb{R}) = \{\ f(x) \mid x \in \mathbb{R}\ \} = \{\ x^2 \mid x \in \mathbb{R}\ \} = [0, \infty)\ (= 0 \text{ 以上の実数全体})$$

である。 □

● 7-4：線形性

２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる写像

(7-4 a) $$T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

を考える。この写像は次の性質を持つ：任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(i) $T_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y})$.
(ii) $T_A(t\mathbf{x}) = tT_A(\mathbf{x})$.

性質 (i),(ii) を**線形性**と呼ぶ。

例 7-4-1 (x, y)-座標平面において、方程式 $y = 2x + 1$ によって表わされる直線 L を考える。$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$L = \{\ t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\ \}$ と書くことができる。行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ による L の像は

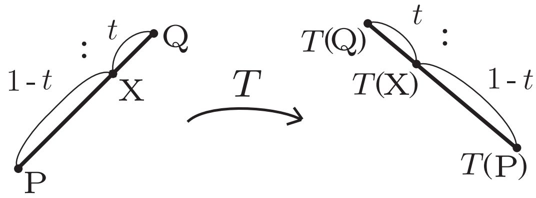
$$T_A(L) = \left\{\ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\}$$

であるから、L は T_A により点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通り、L に平行な直線に写される。

同様の考察により、方程式 $y = -2x + 1$ によって表わされる直線 M は T_A により１点集合 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ に写されることがわかる。 □

● 7-5：線形性の幾何学的な意味

2 次正方行列 A から定まる写像 $T = T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を考える。平面上に異なる 2 点 P, Q をとり、この 2 点を端点とする線分が T によってどのようなものに写されるのかを考察しよう。点と位置ベクトルの同一視により、P, Q をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ とみなそう。簡単のために、$T(\mathbf{p}) \neq T(\mathbf{q})$ を仮定する。P, Q を端点とする線分上の点 X は $t \in [0,1]$ として $t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q}$ によって表わされる。これを T で写したものは、線形性から、

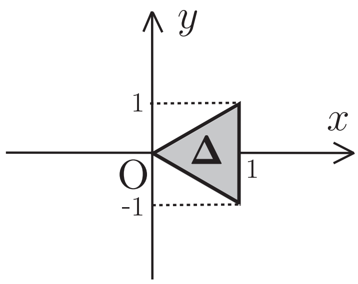


(7-5 a) $$T(t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q}) = T(t\mathbf{p}) + T((1-t)\mathbf{q}) = tT(\mathbf{p}) + (1-t)T(\mathbf{q})$$

となる。したがって、線分 PQ を $1-t:t$ に内分する点は、T により、線分 $T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})$ を $1-t:t$ に内分する点に写されていることがわかる。

以上の考察から、幾何学的には、$T = T_A$ は線分の内分比を保つような写像である、と言うことができる。

<u>**例 7-5-1**</u>　右図で与えられる（周とその内部からなる）三角形 Δ の頂点 $\mathrm{O}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathrm{Q}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を行列 $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ により写すと、順に $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ となる。$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと、Δ は



$$\Delta = \{\ s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s+t \leq 1\ \}$$

と表されるから、T_A による Δ の像 $T_A(\Delta)$ は

$$\begin{aligned} T_A(\Delta) &= \{\ T_A(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s+t \leq 1\ \} \\ &= \{\ sA\mathbf{p} + tA\mathbf{q} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s+t \leq 1\ \} \\ &= \left\{\ s\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ s \geq 0,\ t \geq 0,\ s+t \leq 1\ \right\} \end{aligned}$$

で与えられることがわかる。これは、3 点 $\mathrm{O},\ \mathrm{P}'\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ \mathrm{Q}'\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ を頂点とする三角形の周および内部を表わす。 □

● 7-6：行列から定まる線形写像

2 次正方行列 A が与えられると、(7-4 a) のようにして写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が定まるが、全く同様に、(m,n)-行列 $A = (a_{ij})_{i,j}$ が与えられると、n 次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、m 次元ベクトル

(7-6 a) $$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{R}^m$$

を対応させる写像が定まる。この写像を $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ によって表わす：

(7-6 b) $$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

2次正方行列のときと同様に、T_A は線形性を持つことがわかる：任意の $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(i) $T_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y})$.

(ii) $T_A(t\mathbf{x}) = tT_A(\mathbf{x})$.

T_A を**行列 A から定まる線形写像**と呼ぶ。

● 7-7：数ベクトル空間の間の線形写像

線形性を持つ写像は線形写像と呼ばれる。すなわち、写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が**線形写像**であるとは、次の2条件が満たれるときをいう：すべての $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ とすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(LM1) $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$.

(LM2) $F(t\mathbf{x}) = tF(\mathbf{x})$.

実は、数ベクトル空間の間の線形写像は (7-6 b) のように行列から定まるものに限られる。

定理 7-7-1

任意の線形写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、$F = T_A$ となる (m,n)-行列 A が一意的に存在する。

(**証明**)

I. A の存在：

$\mathbb{R}^n$ の標準基底 "$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$" を F で写し、それらを並べて行列 $A = (F(\mathbf{e}_1)\ \cdots\ F(\mathbf{e}_n))$ を作る。

任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ のように表わすことができるから、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= x_1F(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nF(\mathbf{e}_n) \qquad (\because\ F \text{ の線形性}) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + \cdots + x_nA\mathbf{e}_n \qquad (\because\ A \text{ の定義}) \\ &= x_1T_A(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT_A(\mathbf{e}_n) \qquad (\because\ T_A \text{ の定義}) \\ &= T_A(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \qquad (\because\ T_A \text{ の線形性}) \\ &= T_A(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

を得る。よって、$F = T_A$ が成り立つ。

II. A の一意性：

2つの (m,n)-行列 $A = (a_{ij})_{i,j},\ B = (b_{ij})_{i,j}$ が $T_A = T_B$ を満たしていると仮定する。このとき、$i = 1, \cdots, n$ に対して、

$$\begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix} = B\mathbf{e}_i = T_B(\mathbf{e}_i) = T_A(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

となる。よって、$A = B$ を得る。故に、$F = T_A$ となる (m,n)-行列 A は一意的である。 □

No.7 2024年11月7日

線形代数２事前練習用演習問題

pre7-1. (線形性の幾何学的意味)

行列 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}\ (\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2)$ を考える。

(1) 3 点 $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ の T_A による像を求めよ。

(2) 原点と (1) の 3 点を頂点とする、$\mathbb{R}^2$ 内の平行四辺形の周および内部を S とする。S の T_A による像 $T_A(S)=\{\ T_A(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\ \}$ を求め、それを (x,y)-座標平面上に図示せよ。

pre7-2. (数ベクトル空間の間の線形写像)

写像 $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$F\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x-2z\\ 3x+y\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\right)$$

により定める。

(1) F は線形写像であることを示せ。

(2) $F=T_A$ となる行列 A を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre7-1. (1) $T_A\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}$ である。同様に、

$T_A\left(\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}9\\ -4\end{pmatrix}, T_A\left(\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$

である。

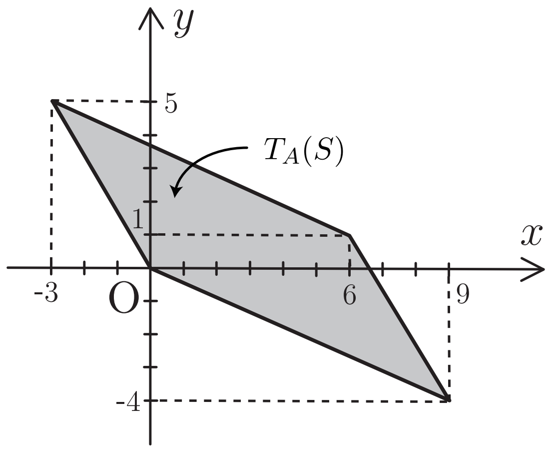
(2) $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{q}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ とおくと、S は

$$S=\{\ s\mathbf{p}+t\mathbf{q}\mid s,t\in\mathbb{R},\ 0\le s,t\le 1\ \}$$

と表わされる。したがって、T_A の線形性より、

$$\begin{aligned}T_A(S)&=\{\ T_A(s\mathbf{p}+t\mathbf{q})\mid s,t\in\mathbb{R},\ 0\le s,t\le 1\ \}\\ &=\{\ sT_A(\mathbf{p})+tT_A(\mathbf{q})\mid s,t\in\mathbb{R},\ 0\le s,t\le 1\ \}\\ &=\left\{\ s\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\ -4\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R},\ 0\le s,t\le 1\right\}\end{aligned}$$

となる。これは、原点および 3 点 $\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\ -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$ を頂点とする、平行四辺形の周および内部を表わす。$T_A(S)$ を図示すると、下図のようになる。



pre7-2. (1) (LM1) 任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= F\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) \quad (\mathbb{R}^3 \text{ における和の定義より}) \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(z_1 + z_2) \\ 3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \end{pmatrix} \quad (F \text{ の定義より}) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 2z_1 \\ 3x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2z_2 \\ 3x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^2 \text{ における和の定義より}) \\ &= F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \quad (F \text{ の定義より}) \end{aligned}$$

となる。よって、F は条件 (LM1) を満たす。

(LM2) を満たすことも同じように示すことができるので、ここでは略す。

(2) F は線形写像であることがわかったから、$F = T_A$ を満たす行列 A は、$\mathbb{R}^3$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$” を用いて、$A = \big(F(\mathbf{e}_1)\ F(\mathbf{e}_2)\ F(\mathbf{e}_3)\big)$ により与えられる。

$$F(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、求める行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

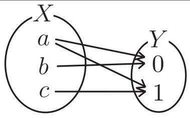
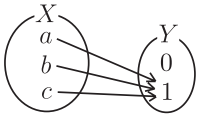
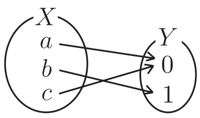
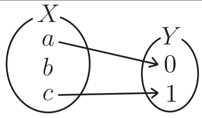
線形代数２・第７回 (2024 年 11 月 7 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第７回学習内容チェックシート 2024 年 11 月 7 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$ とする。次の各図は X の元に対し、その元から出ている矢印の先に書かれている Y の元を対応させる規則を表わしている。それぞれの対応規則は X から Y への写像と呼ぶことができるか？解答を下欄に記しなさい。理由も書きなさい。

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

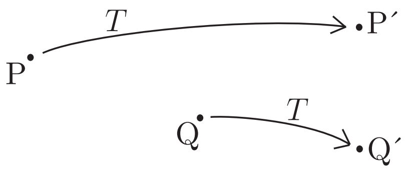
Q2. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
２つの写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $f' : X' \longrightarrow Y'$ が等しいとは？	p.	
写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは？	p.	

Q3. $(2, 3)$-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ から定まる線形写像 T_A とはどのように定義される写像か？この写像の定義を下に書きなさい。定義域と終域も明記しなさい。

Q4. 平面上の異なる 2 点 P, Q が 2 次正方行列 A から定まる線形写像 $T = T_A$ によってそれぞれ点 P', Q' に写されたとする。

- T は線分 PQ をどのような集合に写すか？
  ① $\mathrm{P}' \neq \mathrm{Q}'$ のとき ② $\mathrm{P}' = \mathrm{Q}'$ のとき
- $\mathrm{P}' \neq \mathrm{Q}'$ のとき、線分 PQ を $t : 1 - t$ に内分する点 X は T によってどのような点に写されるか。右枠の中に文章と図の両方を用いて答えなさい。



Q5. 任意の線形写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ は、ある (m, n)-行列 A を用いて $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ のように表わすことができる。このような行列 A はどのようにすれば作ることができるか。その作り方を下の枠内に書きなさい。

Q6. 第７回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。