

§7. 随伴行列と随伴変換

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ に対して $A^* = \overline{A^T} \in M_{nm}(\mathbb{K})$ を A の随伴行列という。この節では、 $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間 V 上の任意の線形変換 T に対し、随伴行列の役割りを果たす線形変換 T^* が一意的に存在することを示す。また、そのような線形変換の性質を調べ、ユニタリ変換の随伴変換を用いた特徴づけを与える。

● 7-1 : 随伴行列の特徴づけ

行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ の随伴行列 $A^* = \overline{A^T} \in M_{nm}(\mathbb{K})$ は、(エルミート)内積を介して次の補題のように特徴づけられる。

補題 7-1-1

$A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ とする。 $B \in M_{nm}(\mathbb{K})$ に対して次の①, ②は同値である。

- ① B は A の随伴行列である。
- ② 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ と任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^m$ に対して

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{y} \rangle.$$

特に、 A の随伴行列 A^* は任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ と任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^m$ を満たす：

$$(7-1 \text{ a}) \quad \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle.$$

(証明)

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とおく。“ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ” を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とし、“ $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m$ ” を $\mathbb{K}^m$ の標準基底とする。

$$A\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad B\mathbf{e}'_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j \rangle = a_{ji}, \quad \langle \mathbf{e}_i, B\mathbf{e}'_j \rangle = \overline{b_{ij}}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \text{②} &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \text{ に対して } a_{ji} = \overline{b_{ij}} \\ &\iff A^T = \overline{B} \iff \overline{A^T} = B \iff \text{①} \end{aligned}$$

となる。 □

● 7-2 : 随伴変換の存在と定義

随伴行列と同じ性質を持つ線形写像が存在する。すなわち、次が成り立つ。

定理 7-2-1

U, V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間とし、 $T: V \rightarrow U$ を $\mathbb{K}$ -線形写像とする。このとき、次の条件を満たす $\mathbb{K}$ -線形写像 $T^*: U \rightarrow V$ が一意に存在する：任意の $u \in U$ と任意の $v \in V$ に対して

$$(7-2 \text{ a}) \quad \langle T(v), u \rangle = \langle v, T^*(u) \rangle.$$

T^* を T の随伴写像と呼び、 $U = V$ のときには、随伴変換と呼ぶ。

(証明)

• T^* の一意性 :

線形写像 $S_1, S_2 : U \rightarrow V$ がともに T^* と同じ性質を満たすと仮定する。任意に $u \in U$ をとり、固定する。このとき、任意の $v \in V$ に対して

$$\langle v, S_1(u) - S_2(u) \rangle = \langle v, S_1(u) \rangle - \langle v, S_2(u) \rangle = \langle T(v), u \rangle - \langle T(v), u \rangle = 0$$

が成り立つ。したがって、 $S_1(u) - S_2(u) = 0_V$ を得る。この等式が任意の $u \in U$ に対して成り立つから、 $S_1 = S_2$ である。

• T^* の存在 :

$\mathcal{B}_1 = "v_1, \dots, v_n"$, $\mathcal{B}_2 = "u_1, \dots, u_m"$ をそれぞれ V, U の正規直交基底とする。 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ に関する T の行列表示を $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ とおく。このとき、写像 $S : U \rightarrow V$ を、 $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$ に関する行列表示が A^* となるような線形写像として定義する。すなわち、 $A = (a_{ij})$ とおくとき、 S は

$$S(u_j) = \overline{a_{j1}}v_1 + \overline{a_{j2}}v_2 + \dots + \overline{a_{jn}}v_n \quad (j = 1, \dots, m)$$

によって定義される $\mathbb{K}$ -線形写像である。この S が任意の i, j に対して $\langle T(v_i), u_j \rangle = \langle v_i, S(u_j) \rangle$ を満たすことを見るのは易しい。したがって、 S は任意の $v \in V$ と任意の $u \in U$ に対して $\langle T(v), u \rangle = \langle v, S(u) \rangle$ を満たす。 $\square$

注意. T^* の存在は写像 $S : U \rightarrow V$ を

$$S(u) = \overline{\langle T(v_1), u \rangle}v_1 + \overline{\langle T(v_2), u \rangle}v_2 + \dots + \overline{\langle T(v_n), u \rangle}v_n \quad (u \in U)$$

と定義することで、行列表示を経由せずに示すことができる。

T^* の存在の証明から、次がわかる。

系 7-2-2

$\mathbb{K}$ -線形写像 $T : V \rightarrow U$ の V, U の正規直交基底 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ に関する行列表示が A であるとき、随伴写像 $T^* : U \rightarrow V$ の $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$ に関する行列表示は A の随伴行列 A^* である。

次の命題に列挙されているように、随伴写像は随伴行列と同じ性質を持つ。

命題 7-2-3

U, V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間とし、 $S : W \rightarrow V, T : V \rightarrow U$ を $\mathbb{K}$ -線形写像とする。このとき、

$$(1) (T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

$$(2) (T^*)^* = T.$$

$$(3) (\text{id}_V)^* = \text{id}_V.$$

(証明)

随伴写像の一意性を利用して証明する。

(1) 任意の $w \in W$ と $u \in U$ に対して、(7-2 a) より

$$\langle (T \circ S)(w), u \rangle = \langle S(w), T^*(u) \rangle = \langle w, S^*(T^*(u)) \rangle = \langle w, (S^* \circ T^*)(u) \rangle$$

が成り立つ。 $T \circ S$ の随伴写像の一意性により、 $\mathbb{K}$ -線形写像 $S^* \circ T^*$ は $(T \circ S)^*$ に一致することがわかる。

(2), (3) も同様に示すことができる。 $\square$

● 7-3 : ユニタリ行列の随伴行列を用いた言い換え

前節で導入されたユニタリ行列の定義は、次のように随伴行列を用いて書き換えることができる。これにより、ユニタリ行列の逆行列が随伴行列により与えられることがわかる。

補題 7-3-1

$U \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$U \text{ はユニタリ行列である} \iff U^*U = E_n$$

が成り立つ。これより、ユニタリ行列 U の逆行列は U^* により与えられる。

(証明)

$U = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) = (u_{ij})$ とおくと、

$$U^*U = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \overline{u_{k1}}u_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \overline{u_{k1}}u_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n \overline{u_{kn}}u_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \overline{u_{kn}}u_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \rangle \end{pmatrix}$$

となるから、

$$U \text{ はユニタリ行列} \iff \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の正規直交基底} \iff U^*U = E_n$$

が成り立つ。

ユニタリ行列は正則である(これは、今示された $U^*U = E_n$ の行列式をとって $|U| \neq 0$ となることからわかる)から、 $U^*U = E_n$ の両辺に右から U の逆行列を掛けて、 $U^{-1} = U^*$ を得る。□

注意. 上の補題と同様に、 $P \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$P \text{ は直交行列である} \iff P^T P = E_n$$

が成り立ち、直交行列 P の逆行列は P^T により与えられることがわかる。

例 7-3-2 3 次正方行列 $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 0 & -\frac{1+i}{2} \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$ はユニタリであるから、正則であり、その

逆行列は次で与えられる：

$$U^{-1} = U^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

● 7-4 : ユニタリ変換の特徴づけ

ユニタリ行列は $A^*A = E_n$ を満たす複素正方行列 A として特徴づけられたが、 V 上のユニタリ変換はまた $T^* \circ T = \text{id}_V$ を満たす線形変換 T として特徴づけることができる。ここでは、この事実を含む、ユニタリ変換の同値な言い換えを述べる。

定理 7-4-1

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、 $T: V \rightarrow V$ を $\mathbb{C}$ -線形変換とする。このとき、次の3つは同値である。

- ① T はユニタリ変換である。
- ② $T^* \circ T = \text{id}_V$.
- ③ T はノルムを保つ、すなわち、任意の $v \in V$ に対して $\|T(v)\| = \|v\|$.

(証明)

「① $\Rightarrow$ ②」の証明： $u \in V$ を任意にとり固定する。任意の $v \in V$ に対して

$$\langle v, (T^* \circ T)(u) \rangle = \langle T(v), T(u) \rangle = \langle v, u \rangle$$

であるから、(エルミート)内積の正定値性により、 $(T^* \circ T)(u) = u$ が従う。これが任意の $u \in V$ に対して成り立つので、 $T^* \circ T = \text{id}_V$ であることがわかる。

「② $\Rightarrow$ ③」の証明：任意の $v \in V$ に対して

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, (T^* \circ T)(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

「③ $\Rightarrow$ ①」の証明：任意の $u, v \in V$ に対して

$$\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$$

であり、 $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ であるから、 $\langle v, u \rangle$ の実部は次で与えられる：

$$(7-4 a) \quad \text{Re}(\langle u, v \rangle) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2).$$

したがって、

$$\begin{aligned} \text{Re}(\langle T(u), T(v) \rangle) &= \frac{1}{2}(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|T(u + v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \\ &= \text{Re}(\langle u, v \rangle) \end{aligned}$$

である。また、(7-4 a)において u の代わりに iu を代入して、 $\langle v, u \rangle$ の虚部は次で与えられることがわかる：

$$(7-4 b) \quad \text{Im}(\langle u, v \rangle) = -\text{Re}(i\langle u, v \rangle) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|iu + v\|^2).$$

よって、

$$\text{Im}(\langle T(u), T(v) \rangle) = \text{Im}(\langle u, v \rangle)$$

も成り立つ。こうして、 $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ が示された。 $\square$

注意 1. ユニタリ変換は全単射であるから ([命題 6-3-5])、 $T^* \circ T = \text{id}_V$ に右から逆写像を合成して $T^{-1} = T^*$ を得る。したがって、 T がユニタリ変換ならば、 $T \circ T^* = \text{id}_V$ も成り立つ。

注意 2. 上の定理と同様に、 $\mathbb{R}$ 上の有限次元計量空間 V 上の $\mathbb{R}$ -線形変換 $T : V \rightarrow V$ に対して、次の3つは同値であることがわかる。

- ① T は直交変換である。
- ② $T^* \circ T = \text{id}_V$.
- ③ T はノルムを保つ、すなわち、任意の $v \in V$ に対して $\|T(v)\| = \|v\|$.

[定理 7-4-1] の①と②の同値性から、直ちに次を得る。

系 7-4-2

T がユニタリ変換であるとき、

- (1) T の逆写像は T の随伴変換 T^* である： $T^{-1} = T^*$.
- (2) $T^* = T^{-1}$ もまたユニタリ変換である。

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre7-1. U, V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間とする。次を示せ。

- (1) $\mathbb{K}$ -線形写像 $T: V \rightarrow U$ に対して $(T^*)^* = T$.
- (2) V 上の恒等写像 id_V に対して $(\text{id}_V)^* = \text{id}_V$.

pre7-2. (1) 直交行列の行列式は 1 か -1 のいずれかであることを示せ。

- (2) $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば、積 $P_1 P_2$ もまた直交行列であることを示せ。
- (3) $P \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば、逆行列 P^{-1} もまた直交行列であることを示せ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre7-1. [命題 7-2-3(1)] の証明のように、随伴変換の一意性を利用して示す。

- (1) 任意の $u \in U$ と $v \in V$ に対して

$$\langle T^*(u), v \rangle = \overline{\langle v, T^*(u) \rangle} = \overline{\langle T(v), u \rangle} = \langle u, T(v) \rangle$$

となるから、 T^* の随伴変換の一意性より、 $T = (T^*)^*$ であることがわかる。

- (2) 任意の $v, v' \in V$ に対して

$$\langle \text{id}_V(v), v' \rangle = \langle v, v' \rangle = \langle v, \text{id}_V(v') \rangle$$

となるから、 id_V の随伴変換の一意性より、 $(\text{id}_V)^* = \text{id}_V$ を得る。

pre7-2. [補題 7-3-1] の証明の下の注意を用いる。

(1) P を n 次直交行列とすると、 $P^T P = E_n$ が成り立つ。任意の n 次正方行列 A, B に対して $|AB| = |A||B|$ および $|A^T| = |A|$ となることから、 $P^T P = E_n$ 両辺の行列式をとることにより、 $|P|^2 = 1$ を得る。よって、 $|P| = \pm 1$ である。

- (2) $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば、

$$(P_1 P_2)^T P_1 P_2 = P_2^T P_1^T P_1 P_2 = P_2^T E_n P_2 = P_2^T P_2 = E_n$$

となる。よって、 $P_1 P_2$ もまた直交行列である。

(3) $P \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば、 P は正則であり、 $P^T P = E_n$ が成立する。したがって、 $P^{-1} = P^T$ であり、 $PP^T = E_n$ が成立する。 $(P^T)^T = P$ であるから、 $PP^T = E_n$ は $(P^T)^T P^T = E_n$ と書き換えられる。これは P^T が直交行列であることを示している。

第7回(2025年5月26日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. (1) 行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ の随伴行列 A^* とはどんな行列か？定義を書け。

$$A^* = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ の随伴行列 A^* を具体的に成分で表わせ。

$$A^* = \underline{\hspace{2cm}}$$

Q2. $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^m$ とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{K}^m$ の (通常のエルミート) 内積とする。 $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ を、 A の随伴行列 A^* と $\mathbb{K}^n$ の (通常のエルミート) 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて書き換えるとどうなるか？

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

Q3. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量空間とし、 $T: V \rightarrow V$ を $\mathbb{K}$ -線形変換とする。(i) T の随伴変換 T^* とはどのような条件によって定まる写像か？その条件を書け。(ii) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ を V の正規直交基底とし、この基底に関する T の行列表示を A とする。このとき、随伴変換 T^* の $\mathcal{B}$ に関する行列表示は何か？Q4. (1) $U \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列であることは、随伴行列 U^* を用いるとどのように言い換えることができるか？さらに、この言い換えから、 U がユニタリ行列とき、その逆行列はどのように与えられることがわかるか？

[ユニタリ行列の随伴行列を用いた言い換え]

[ユニタリ行列の逆行列]

(2) V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、 T を V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換とする。 T がユニタリ変換であることは、随伴変換 T^* を用いるとどのように言い換えることができるか？さらに、この言い換えから、 T がユニタリ変換とき、その逆写像はどのように与えられることがわかるか？

[ユニタリ変換の随伴変換を用いた言い換え]

[ユニタリ変換の逆写像]

Q5. 第7回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。