

§7. 部分空間と次元

この節では部分空間の概念を復習する。沢山の部分空間の例が与えられるが、特に、微分方程式に現れる部分空間の例を十分に理解して欲しい。最後に、線形代数学に関する議論でよく使われる、部分空間の包含関係と次元の関係を説明する。これまでと同様に、 $\mathbb{K}$ は体とする。

● 7-1 : 部分空間

[例 5-1-3] で与えた5つの例はベクトル空間の代表例であるが、具体的な問題に現れるベクトル空間はそれらの一部分であることが多い。そこで、部分空間の概念を導入しよう。

定義 7-1-1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、 W を V の部分集合とする。 W が V の**部分(ベクトル)空間**であるとは、以下の3つの条件が成り立つときをいう。

(SS0) $0_V \in W$.

(SS1) 任意の $w, w' \in W$ に対して、 $w + w' \in W$.

(SS2) 任意の $w \in W$ と任意の $t \in \mathbb{K}$ に対して、 $tw \in W$.

注意. W がベクトル空間 V の部分空間のとき、 V における和とスカラー倍を W 上に制限することにより、 W 自身を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と考えることができる。

例 7-1-2 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。

(1) V 自身、および、零ベクトルだけからなる部分集合 $\{0_V\}$ は V の部分空間である。

(2) $v_1, \dots, v_k \in V$ に対して

$$(7-1 \text{ a}) \quad \text{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_k\} = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}\}$$

は V の部分空間である。これを $v_1, \dots, v_k$ によって**張られる部分空間**という。

● 7-2 : 部分空間の具体例

例 7-2-1 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ を1つ固定する。 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$

は $\mathbb{K}^n$ の部分空間である。 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ならば W は $\mathbb{K}^n$ 内の(超)平面を表わす。□

例 7-2-2 $V = \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分集合

$$C^\infty(\mathbb{R}) = \{f \mid f \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上で定義された何回でも微分可能な関数}\}$$

は V の部分空間である。

(証明)

(SS0) V の零ベクトル 0_V は $0_V(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) によって定義される $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である。 0_V は何回でも微分可能であるから、 $0_V \in C^\infty(\mathbb{R})$ を満たす。

(SS1) $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ とすると、 f, g は何回でも微分可能である。微分可能な関数の和は微分可能であるから、 $f + g$ は何回でも微分可能である。よって、 $f + g \in C^\infty(\mathbb{R})$ である。

(SS2) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ とすると、 f は何回でも微分可能である。微分可能な関数の定数倍は微分可能であるから、 tf は何回でも微分可能である。よって、 $tf \in C^\infty(\mathbb{R})$ である。

以上より、 $C^\infty(\mathbb{R})$ は V の部分空間である。□

● 7-3 : 微分方程式の解空間

例 7-3-1 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} \text{ は } \mathbb{R} \text{ から } \mathbb{R}^m \text{ への何回でも微分可能な写像} \}$$

を考える (注: $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ が微分可能であるとは、 $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) によって定義される関数 $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) が微分可能であることをいう)。

$A \in M_m(\mathbb{R})$ とし、連立微分方程式

$$(7-3 \text{ a}) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in V)$$

を考える。この連立微分方程式の解全体を W とおく。 W は V の部分空間をなす。 $\square$

$\alpha \in \mathbb{R}$ として A が次の m 次正方行列 $J(\alpha, m)$ の場合に連立微分方程式 (7-3 a) を考えよう。

$$(7-3 \text{ b}) \quad J(\alpha, m) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \mathbf{O} \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{O} & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\text{その解として } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots \\ e^{\alpha t} \frac{t^2}{2!} \\ e^{\alpha t} t \\ e^{\alpha t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ が見つかる。より一般に、次が成り立つ。}$$

定理 7-3-2

$\alpha \in \mathbb{R}$ とし、次の連立微分方程式を考える：

$$(7-3 \text{ c}) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = J(\alpha, m)\mathbf{x}.$$

この連立微分方程式の解全体のなすベクトル空間を W とおく。このとき、

$$(1) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\alpha t} p_{m-1}(t) \\ \vdots \\ e^{\alpha t} p_0(t) \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} p_i(t) \text{ は } i \text{ 次以下の多項式関数 } (i = 0, 1, \dots, m-1) \\ \text{で、} (p_i(t))' = p_{i-1}(t) \text{ } (i = 1, \dots, m-1) \end{array} \right\}.$$

(2) 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ に対して $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ となる解 $\mathbf{x}$ が一意的に存在する。さらに、“ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ ” を $\mathbb{R}^m$ の基底とし、 $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, \dots, m$) を $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{u}_i$ を満たす微分方程式 (7-3 c) の解とすると、“ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ ” は W の基底を与える。

(証明)

(1) 右辺の集合を U とおく。 $U \subset W$ は簡単に確かめられる。 $W \subset U$ を示す。 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{m-1} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} \in W$ を任意にとる。各 $i = 1, \dots, m-1$ に対して $y_i(t) = e^{-\alpha t} x_i(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) とおくと、 $i \geq 2$ に対して $(y_i(t))' = y_{i-1}(t)$ を満たすことがわかる。 $(y_0(t))' = 0$ であるから、各 i に対して $(y_i(t))^{(i+1)} = 0$ である。よって、 y_i は i 次以下の多項式関数であり、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} y_{m-1} \\ \vdots \\ e^{\alpha t} y_0 \end{pmatrix} \in U$ である。故に、 $W \subset U$ が示された。 $\dim U = m$ であるから、 $\dim W = \dim U = m$ もわかる。

$$(2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

- 解の存在: $i = 0, 1, \dots, m-1$ に対して $x_i \in \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を

$$x_i(t) = e^{\alpha t} \left(a_0 \frac{t^i}{i!} + a_1 \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + a_{i-1}t + a_i \right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定義し、 $\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_{m-1}(t) \\ \vdots \\ x_0(t) \end{pmatrix}$ と定める。 $x'_i(t) = \alpha x_i(t) + x_{i-1}(t)$ ($i = 1, \dots, m-1$)

であり、 $x'_0(t) = \alpha x_0(t)$ を満たすから、 $\mathbf{x}$ は (7-3 c) の解である。さらに、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ を満たす。

- 解の一意性: $\mathbf{x}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) を $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ を満たす (7-3 c) の解とする。

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{x}(t) \text{ とおき、 } \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_{m-1}(t) \\ \vdots \\ y_0(t) \end{pmatrix} \text{ と定めると、 } (y_i(t))' = y_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, m-1),$$

$(y_0(t))' = 0$ が成り立ち、また、 $\mathbf{y}(0) = e^{-\alpha \cdot 0} \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ であることがわかる。

$(y_0(t))' = 0$ より $y_0(t)$ は定値関数であるが、 $y_0(0) = a_0$ より、 $y_0(t) = a_0$ とわかる。

次に、 $(y_1(t))' = y_0(t) = a_0$ であるから、 $y_1(t)$ は 1 次多項式の形をしている。よって、 $y_1(t) = a_0 t + b$ ($b \in \mathbb{R}$) とおくことができる。 $y_1(0) = a_1$ より、 $b = a_1$ とわかる。故に、 $y_1(t) = a_0 t + a_1$ である。以下同様にして、

$$y_i(t) = a_0 \frac{t^i}{i!} + a_1 \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + a_{i-1}t + a_i$$

であることがわかる。このようにして、 $\mathbf{y}(t)$ が一意的に決まるので、 $\mathbf{x}(t)$ も一意的に決まる。

- “ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ ” が W の基底を与えること:

$$(*) \quad t_1 \mathbf{x}_1 + \dots + t_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0} \quad (t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R})$$

とおく。ここで、右辺の $\mathbf{0}$ は 0 への定値関数を並べて得られる (7-3 c) の解を表わしている。このとき、(*) に 0 を代入することにより、 $\mathbb{R}^m$ における等式 $t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$ を得る。仮定より、“ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ ” は一次独立であるから、 $t_1 = \dots = t_m = 0$ を得る。故に、“ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ ” も一次独立である。 $\dim W = m$ であるから、この列は W の基底をなす。□

● 7-4 : 三角関数の加法公式の導出

次の命題を用いて三角関数の加法公式を導くことができる。

命題 7-4-1

次の 2 条件を満たす関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の全体からなる集合を W とおく:

- (i) f は 2 回微分可能であって、その第 2 次導関数 $f'' := (f')'$ は連続である。
- (ii) $f'' = -f$.

このとき、 W は $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の 2 次元部分空間であり、“ $\cos, \sin$ ” はその 1 組の基底である。

(証明)

W が $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分空間であることは簡単に確かめられる。“ $\cos, \sin$ ” が W の基底であることを示す。

- “ $\cos, \sin$ ” が $\mathbb{R}$ 上一次独立であること:

$$a \sin + b \cos = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

とおくと、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$a \sin x + b \cos x = (a \sin + b \cos)(x) = 0(x) = 0$$

となる。この等式において、 $x = 0$ と $x = \frac{\pi}{2}$ を代入して $b = 0$, $a = 0$ を得る。

- “cos, sin” が W を張ること：

まず、 $\sin, \cos \in W$ に注意しよう。任意の $f \in W$ が $\sin, \cos$ の $\mathbb{R}$ -一次結合で表わされることを示す。 $f(0) = a$, $f'(0) = b$ とおき、

$$g(x) = a \cos x + b \sin x - f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 $g \in W$ であって、 $g(0) = g'(0) = 0$ を満たしていることがわかる。実は $g = 0$ である。実際、 $(g^2 + g'^2)' = 2gg' + 2g'g'' = 2gg' - 2g'g = 0$ となるので、平均値の定理により $g^2 + g'^2$ は定数関数である。よって、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(x)^2 + g'(x)^2 = (g^2 + g'^2)(x) = (g^2 + g'^2)(0) = g^2(0) + g'^2(0) = 0$$

となる。 $g(x), g'(x) \in \mathbb{R}$ であるから、上式が成り立つためには、 $g(x) = g'(x) = 0$ でなければならない。これで、 $g = 0$ が証明され、 $f = a \cos + b \sin$ と表わされることがわかった。□

上の命題から $\sin, \cos$ の加法公式

$$\begin{cases} \sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi \\ \cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

を導くことができる(例えば、 $\sin$ の加法公式を導くには、 $\varphi \in \mathbb{R}$ を固定し、 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ($x \in \mathbb{R}$) によって定義される関数 $f \in W$ を考えればよい)。

● 7-5：部分空間の包含関係と次元

次の定理は線形代数学に関する議論でよく使われる。

定理 7-5-1

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、 W をその部分空間とする。このとき、

- (1) W は有限次元であって、 $\dim W \leq \dim V$ となる。
- (2) $\dim W = \dim V$ のとき $W = V$ である。

(証明)

- (1) $V \neq \{0_V\}$ のときに証明すれば十分である。 $n = \dim V$ とする。

$W = \{0_V\}$ ならば W は有限次元であり、 $\dim W = 0 \leq n = \dim V$ となる。

$W \neq \{0_V\}$ であるとし、 W は有限次元でないと仮定する。 0_V でないベクトル $w_1 \in W$ を1つとる。 W は有限次元でないから、 $\text{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1\} \subsetneq W$ となる。したがって、 $w_2 \notin \text{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1\}$ を満たす $w_2 \in W$ が存在する。[定理 5-3-2] の対偶により、“ w_1, w_2 ” は一次独立である。 W は有限次元でないから、 $\text{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, w_2\} \subsetneq W$ となる。したがって、 $w_3 \notin \text{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, w_2\}$ を満たす $w_3 \in W$ が存在し、“ w_1, w_2, w_3 ” は一次独立である。以下同様の操作を繰り返して、 W の中に一次独立な $(n+1)$ 個のベクトル $w_1, w_2, \dots, w_{n+1}$ が存在することがわかる。しかしながら、これは[補題 6-3-2]に矛盾する。故に、 W は有限次元である。

$\dim W = k$ とおき、“ $w_1, \dots, w_k$ ” を W の基底とすると、これは V の中の一次独立なベクトルの列である。よって、 $k < n$ ならば $w_1, \dots, w_k$ に $(n-k)$ 個のベクトル $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ を付加えて “ $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ ” が V の基底となるようにすることができる ([定理 6-4-1])。したがって、 $\dim W = k \leq n = \dim V$ が成り立つ。

- (2) W の基底 “ $w_1, \dots, w_k$ ” は一次独立であるから、 $\dim W = \dim V$ ならば、[定理 6-3-1] により、これらは V の基底にもなる。したがって、 $W = V$ となる。□

線形代数 4 事前練習用演習問題

pre7-1. n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

に対して対角成分の和を $\text{Tr } A$ とおき、 A のトレースと呼ぶ： $\text{Tr } A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

$$W := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr } A = 0\}$$

とおく。

- (1) W は $M_n(\mathbb{K})$ の部分空間であることを示せ。
- (2) W の基底を一組見つけて、 $\dim W$ を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre7-1. (1) (SS0) $M_n(\mathbb{K})$ における零ベクトルは n 次正方行列の零行列 O である。明らかに $\text{Tr } O = 0$ であるから、 $O \in W$ を満たす。

(SS1) $A, B \in W$ を任意にとる。 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とおくと、 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ であるから、

$$\text{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Tr } A + \text{Tr } B = 0 + 0 = 0$$

となる。よって、 $A + B \in W$ である。

(SS2) 任意の $A \in W$ と任意の $t \in \mathbb{K}$ に対して $\text{Tr}(tA) = t(\text{Tr } A) = t \cdot 0 = 0$ となることから、 $tA \in W$ である。

(SS0), (SS1), (SS2) が満たされるので、 W は $M_n(\mathbb{K})$ の部分空間である。

(2) E_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) を (i, j) -成分のみ 1 で残りの成分は 0 の n 次正方行列とする。このとき、任意の $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in W$ は

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_{ij} E_{ij} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{kk} (E_{kk} - E_{nn})$$

と表わされる。このことと、 $i \neq j$ のとき $E_{ij} \in W$ であり、 $k = 1, \dots, n-1$ に対して $E_{kk} - E_{nn} \in W$ であることと合わせて、“ E_{ij} ($i \neq j$), $E_{kk} - E_{nn}$ ($k = 1, \dots, n-1$)” は W を張ることがわかる。さらに、これは $\mathbb{K}$ 上一次独立であるから、 W の基底をなす。したがってまた、 $\dim W = n(n-1) + (n-1) = n^2 - 1$ であることがわかる。

線形代数4・第7回(2025年11月10日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。(1) $W \subset V$ が V の部分空間であるとはどのような条件が成り立つときをいうか？その3条件を書け。

(SS0) _____

(SS1) _____

(SS2) _____

(2) $v_1, \dots, v_k \in V$ によって張られる部分空間とはどのような部分空間のことをいうか。Q2. V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、 W をその部分空間とする。(1) $\dim W$ と $\dim V$ の間に常に成立する不等式を書け。

(2) 上の不等式において、等号が成立するのはどのようなときか？

$$\dim W = \dim V \iff \underline{\hspace{2cm}}$$

Q3. 実ベクトル空間 $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ の部分空間

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) = \{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} \text{ は } \mathbb{R} \text{ から } \mathbb{R}^3 \text{ への何回でも微分可能な写像} \}$$

を V とおき、これ自身を1つの実ベクトル空間とみなす。

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ として 3 次正方行列 } J(\alpha, 3) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ を考え、連立微分方程式}$$

$$(*) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = J(\alpha, 3)\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3))$$

の解全体のなす V の部分空間を W とおく。(1) $\dim W = \underline{\hspace{2cm}}$.(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ を満たす $(*)$ の解 $\mathbf{x}$ はどのように与えられるか？ $\mathbf{x}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) を成分で記せ： $\mathbf{x}(t) =$ (3) $\mathbb{R}^3$ の基底 “ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ” が与えられたとき、この基底に対応して W の基底 “ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ” が定まる。この基底はどのように与えられるか。

Q4. 第7回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。