§7. 平均値の定理とその応用

この節では、微分に関する定理の中で最も基本的な平均値の定理を説明する。応用として、関数の極値を微分を使って求める方法や関数の極限を微分を用いて求める方法—ロピタルの定理—を学ぶ。

● 7 - 1 ： 平均値の定理

ここでは、ラグランジュの平均値の定理と呼ばれる定理とコーシーの平均値の定理と呼ばれる２つの平均値の定理を紹介する (この２つの定理は本質的には同じ内容の定理である)。

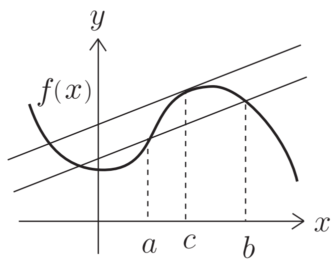
定理 7 - 1 - 1 (**ラグランジュの平均値の定理**)

$f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とする。$a < b$ であるような任意の $a, b \in I$ に対して、

(7 - 1 a)
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす c が開区間 (a, b) の中に存在する。

ラグランジュの平均値の定理は、微分可能な関数 $f(x)$ の定義域内の２点 a, b $(a < b)$ に対して平面上の２点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を結ぶ直線を考えると、$f(x)$ のグラフが表わす曲線 C に、その直線と同じ傾きを持つ接線を引くことができる、ということを主張する定理である。



ラグランジュの平均値の定理において、$f(a) = f(b)$ の場合は、特別に、ロルの定理と呼ばれている。

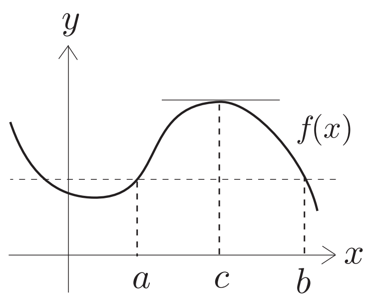
定理 7 - 1 - 2 (**ロルの定理**)

$f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とする。このとき、$a < b$ であるような $a, b \in I$ において $f(a) = f(b)$ であれば、

$$f'(c) = 0$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。

この定理は、関数 $f(x)$ のグラフ C を考えたとき、$f(a) = f(b)$ であれば、ある点 $(c, f(c))$ (但し、$a < c < b$) における曲線 C の接線は x 軸に平行になる、ということを意味している。$f(x)$ の「極大」や「極小」を与える点では曲線 C の接線は x 軸に平行なので、定理の主張の正しさを実感することができる (詳しい証明は教科書 p.15 を参照)。



ロルの定理から次のコーシーの平均値の定理が導かれる。

定理 7-1-3 (コーシーの平均値の定理)

$f(x)$, $g(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数で、任意の $x \in I$ に対して $g'(x) \neq 0$ であるとする。このとき、$a < b$ であるような $a, b \in I$ に対して $g(a) \neq g(b)$ となり、

(7-1 b) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。

(**証明**)

もし、$g(a) = g(b)$ であったと仮定すると、ロルの定理により、$g'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在することになり、仮定に反する。よって、$g(a) \neq g(b)$ である。

次に、

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, \qquad F(x) = f(b) - f(x) - k(g(b) - g(x)) \qquad (x \in I)$$

とおく。$F(x)$ は微分可能で、$F(a) = 0 = F(b)$ を満たす。したがって、ロルの定理より、$F'(c) = 0$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。$F'(c) = -f'(c) + kg'(c)$ であるから、$k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ とわかる。 □

注意：コーシーの平均値の定理において $g(x) = x$ の場合がラグランジュの平均値の定理である。

● 7-2：関数の増減

ラグランジュの平均値の定理から直ちに関数の増減に関する次の結果が導かれる。

補題 7-2-1

$f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とする。I に含まれる開区間 (a, b) の中の任意の x について $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) ならば、任意の $x_1, x_2 \in (a, b)$ について、

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{resp. } f(x_1) > f(x_2)\ ).$$

(**証明**)

任意の $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) > 0$ であるとき、ラグランジュの平均値の定理から、$x_1 < x_2$ を満たす x_1, x_2 に対して、

(♯) $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

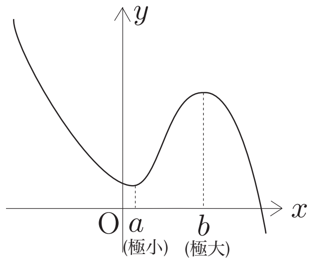
を満たす $c \in (x_1, x_2)$ が存在する。$a < x_1 < c < x_2 < b$ なので、$f'(c) > 0$ である。よって、

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

とわかり、$x_2 - x_1 > 0$ より、$f(x_2) - f(x_1) > 0$, すなわち、$f(x_1) < f(x_2)$ とわかる。

任意の $x \in (a, b)$ に対して $f'(x) < 0$ であるときも同様にして示すことができる。 □

● 7-3：関数の極大・極小



開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が $a \in I$ で**極大** (resp. **極小**) であるとは、a に十分近いすべての点 $x\ (\neq a)$ に対して、$f(x) < f(a)$ (resp. $f(a) < f(x)$) となるとき、つまり、十分小さく $\delta > 0$ をとると、

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < f(a) \quad (\text{resp. } f(a) < f(x))$$

となるときをいう。このとき、$f(a)$ を関数 $f(x)$ の**極大値** (resp. **極小値**) という。極大値と極小値を合わせて単に**極値**という。

関数 $f(x)$ が微分可能なとき、導関数 $f'(x)$ の値が a の前後で正から負に変わる、すなわち、十分小さく $\delta > 0$ をとると、

$$\text{(i)「}a-\delta < x < a \implies f'(x) > 0\text{」 かつ (ii)「}a < x < a+\delta \implies f'(x) < 0\text{」}$$

となるならば、$f(x)$ は a で極大である。実際、ラグランジュの平均値の定理により

$$a-\delta < x < a \implies \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = f'(c) > 0,\ \text{したがって}\ f(a) > f(x),$$

$$a < x < a+\delta \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) < 0,\ \text{したがって}\ f(x) < f(a)$$

となる。同様に、$f'(x)$ の値が a の前後で負から正に変われば、$f(x)$ は a で極小である。

よって、微分可能な関数 $f(x)$ の極値は、$f'(x)=0$ となる $x \in I$ の中から見つけることができる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 7-3-1

$f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とする。$f(x)$ が点 $a \in I$ で極値をとるならば、$f'(a)=0$ である。

(**証明**)

a で極大の場合を考える (極小の場合も同様に示される)。$\delta > 0$ を十分小さくとると、

$$0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < f(a)$$

となるから、

$$a-\delta < x < a \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0, \tag{7-3 a}$$

$$a < x < a+\delta \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0 \tag{7-3 b}$$

が成り立つ。$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ であるから、(7-3 a) と (7-3 b) より (a に収束する数列 $\{a-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{a+\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を考察して、) それぞれ $f'(a) \geq 0$ と $f'(a) \leq 0$ が従う。故に、$f'(a)=0$ でなければならない。 □

注意 7-3-2 定理の逆は成り立たない。例えば、$f(x)=x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ は $f'(0)=0$ を満たすが、$x=0$ で極値を取らない。

例 7-3-3 関数

$$f(x) = x^2 e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

の増減の様子を調べて、極値を求めよう。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'(x) = e^x x(x+2)$ より関数 $f(x)$ の極値を与える x の候補は、$f'(x)=0$ を解いて、$x=0$ と $x=-2$ の２つである。また、$f(x)$ の増減表は上のようになる。$x=-2$ の前後で $f'(x)$ の値は正から負に変わり、$x=0$ の前後で $f'(x)$ の値は負から正に変わるので、$f(x)$ は $x=-2$ で極大となり、$x=0$ で極小となる。また、極大値は $f(-2)=4e^{-2}$ であり、極小値は $f(0)=0$ である。 □

● 7 - 4 : de l'Hospital の定理

2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対して、極限 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ が存在しても、$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ や $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ の場合には、商の公式をそのまま適用すると、

$$\frac{f(x)}{g(x)} \ \to \ \frac{0}{0} \ \text{ または } \ \frac{\infty}{\infty}$$

となり、正しい値は得られない。このような場合、つまり、$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ や $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ が成立する場合、$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ は**不定形**であるという。

このような不定形の極限であっても、うまく条件がそろうと、次の定理のように極限が求まるときがある。

定理 7 - 4 - 1 (ロピタルの定理)

$f(x)$, $g(x)$ を開区間 I 上で定義された連続関数であって、1 点 $a \in I$ 以外では微分可能であるとする。また、a 以外の任意の点 $x \in I$ において、$g(x) \neq 0$ かつ $g'(x) \neq 0$ であるとする。もし、

(i) $f(a) = g(a) = 0$ かつ

(ii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する

ならば、$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在し、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7 - 4 a}$$

ロピタルの定理はコーシーの平均値の定理から証明することができる (証明は省略)。

例 7 - 4 - 2 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x^2}$ が存在するならば、その値を求めよ。

解；

$f(x) = \tan^2 x,\ g(x) = x^2$ は 0 を含む開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ において定義されていて、かつ、微分可能である。また、0 を除く任意の $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対して $g(x) = x^2 \neq 0,\ g'(x) = 2x \neq 0$ である。

$f(0) = \tan^2 0 = 0,\ g(0) = 0^2 = 0$ なので、与えられた極限は $\frac{0}{0}$ の不定形である。

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\tan x \cdot (1 + \tan^2 x)}{2x} = \frac{\tan x + \tan^3 x}{x}$$

となるので、$x \to 0$ のとき再び $\frac{0}{0}$ の不定形となる。そこでもう一度、分母・分子を微分すると、

$$\frac{(\tan x + \tan^3 x)'}{x'} = (1 + \tan^2 x)(1 + 3\tan^2 x) \ \to \ 1 \qquad (x \to 0)$$

となる。したがって、ロピタルの定理を 2 回適用して、$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x^2}$ は存在し、その値は $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(\tan x + \tan^3 x)'}{x'} = 1$ である。 □

注意 7 - 4 - 3 ロピタルの定理には様々な変種があるが、それらについては演習書や参考書などを参照してほしい。

2026 年 5 月 21 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 7 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $f(x)$ を開区間 I 上で定義された関数とし、$a \in I$ とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書いてください。

	ページ	意味	その点付近のグラフの様子 (図示)
関数 $f(x)$ 点 a で極大であるとは？	p.		
関数 $f(x)$ 点 a で極小であるとは？	p.		

Q2. (1) ラグランジュの平均値の定理を述べなさい。

(2) ラグランジュの平均値の定理から、関数の増減に関してどのようなことがわかりますか。

Q3. $f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とします。次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
関数 $f(x)$ の極大値を与える点を求めるには？	

Q4. $f(x), g(x)$ は開区間 I 上で定義された連続関数であって、$a \in I$ を除くすべての $x \in I$ において $f(x), g(x)$ は微分可能であり、$g(x) \neq 0$ であるとします。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形であるとはどのようなときを言いますか。

(2) (1) のような不定形の極限を求めるための方法として、ロピタルの定理があります。ロピタルの定理を適用することができるための条件とこの定理を適用して得られる結果を書きなさい。

- [適用できるための条件]

  (i) $\boxed{}$ (ii) $\boxed{}$

- [適用して得られる結果] $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{}$.

Q5. 第 7 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。