

§7. 連鎖定理

合成関数の偏微分規則は連鎖定理と呼ばれている。この節では、2 変数関数と 1 変数関数との合成、曲線 (= 1 変数 $\mathbb{R}^2$ 値関数) と 2 変数関数との合成、2 変数 $\mathbb{R}^2$ 値関数と 2 変数関数との合成の 3 種類について、連鎖定理を述べ、その計算例を示す。

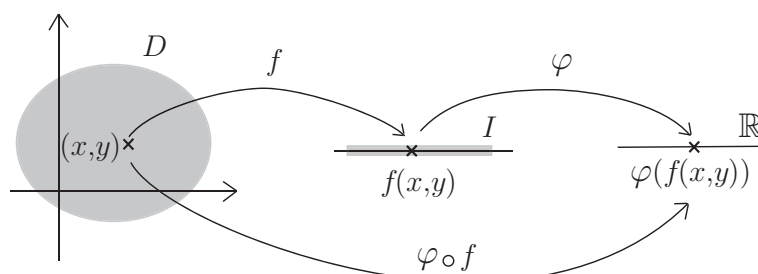
● 7-1：合成関数とその微分可能性 (その 1)

$f = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上で定義された関数とし、 $\varphi = \varphi(z)$ を $\mathbb{R}$ の部分集合 I 上で定義された関数とする。 f と φ が**合成可能**であるとは、

(7-1 a) 全ての $(x, y) \in D$ に対して $f(x, y) \in I$

となるときをいう。このとき、各 $(x, y) \in D$ に対して $\varphi(f(x, y))$ を対応させる関数が定まる。この関数を $\varphi \circ f$ と表わし、 f と φ の**合成関数**という：

(7-1 b) $(\varphi \circ f)(x, y) = \varphi(f(x, y))$



定理 7-1-1

領域 D 上で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ と开区間 I 上で定義された関数 $\varphi(z)$ は合成可能であるとする。 f が点 $(a, b) \in D$ で微分可能で、 φ が $c = f(a, b) \in I$ で微分可能ならば、合成関数 $\varphi \circ f$ も (a, b) で微分可能であり、次式が成り立つ：

$$(7-1 c) \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(a, b) = \varphi'(f(a, b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(a, b) = \varphi'(f(a, b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

したがって、 f と φ が共に微分可能ならば合成関数 $\varphi \circ f$ も微分可能であり、 D 上の関数として次式が成り立つ：

$$(7-1 d) \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x} = (\varphi' \circ f) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y} = (\varphi' \circ f) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

例 7-1-2 関数 $F(x, y) = \sin(xy)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) は、関数 $f(x, y) = xy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) と関数 $\varphi(z) = \sin z$ ($z \in \mathbb{R}$) の合成関数 $\varphi \circ f$ に等しい。 f と φ は微分可能であるから、 $F = \varphi \circ f$ も微分可能であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \sin'(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = (\cos xy)y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \sin'(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = (\cos xy)x. \end{aligned}$$

([定理 7-1-1] の証明)

f は点 $(a, b) \in D$ で全微分可能なので、

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

とおくと、0 に十分近い任意の実数 h, k について、

$$(\#1) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = \alpha h + \beta k + o_1(h, k), \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{o_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

となる $(0, 0)$ の十分近くで定義された関数 $o_1(h, k)$ が存在する。同様に、 φ は点 $c = f(a, b) \in I$ で微分可能なので、

$$\gamma = \varphi'(c)$$

とおくと、0 に十分近い任意の実数 ε について、

$$(\#2) \quad \varphi(c + \varepsilon) - \varphi(c) = \gamma \varepsilon + o_2(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

となる 0 の十分近くで定義された関数 $o_2(\varepsilon)$ が存在する。さて、

$$\begin{aligned} \varphi(f(a+h, b+k)) - \varphi(f(a, b)) &= \varphi(f(a, b) + \alpha h + \beta k + o_1(h, k)) - \varphi(c) \\ &= \varphi(c + \underbrace{\alpha h + \beta k + o_1(h, k)}_{\varepsilon(h, k)}) - \varphi(c) \end{aligned}$$

となる。ここで、波線部分を $\varepsilon(h, k)$ とおくと、

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (\alpha h + \beta k + o_1(h, k)) = 0$$

であるから、 h, k が 0 に十分近いときには、 $\varepsilon(h, k)$ も十分 0 に近い。したがって、 $(\#2)$ を適用することができて、

$$\varphi(f(a+h, b+k)) - \varphi(f(a, b)) = \gamma \alpha h + \gamma \beta k + \gamma o_1(h, k) + o_2(\varepsilon(h, k))$$

となる。

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\gamma o_1(h, k) + o_2(\varepsilon(h, k))}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

であるから、合成関数 $\varphi \circ f$ は (a, b) で全微分可能である。また、

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(a, b) = \gamma \alpha = \varphi'(f(a, b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b),$$

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(a, b) = \gamma \beta = \varphi'(f(a, b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

である。 □

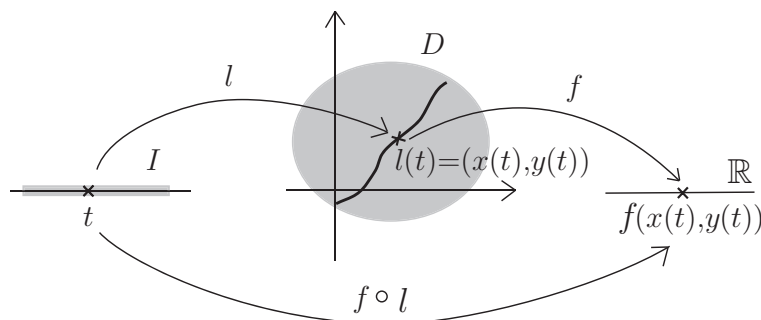
● 7-2 : 合成関数とその微分可能性 (その 2)

$f = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上で定義された関数とし、 $l(t) = (x(t), y(t))$ を $\mathbb{R}$ の部分集合 I 上で定義され $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数とする。 l と f が**合成可能**であるとは、

$$(7-2 \text{ a}) \quad \text{すべての } t \in I \text{ に対して } l(t) \in D$$

となるときをいう。このとき、各 $t \in I$ に対して $f(l(t)) = f(x(t), y(t))$ を対応させる関数が定まる。この関数を $f \circ l$ と表わし、 l と f の**合成関数**という：

$$(f \circ l)(t) = f(l(t)) = f(x(t), y(t)).$$



例 7-2-1 関数 $l(t) = (\cos t, \sin t)$ ($t \in \mathbb{R}$) と関数 $f(x, y) = x^2 y^3$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) に対して、

$$(7-2 \text{ b}) \quad (f \circ l)(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2 (\sin t)^3 \quad (t \in \mathbb{R})$$

である。これは微分可能であり、その導関数は次のように計算される。

$$\frac{d(f \circ l)}{dt}(t) = 2(\cos t) \cdot (\cos t)' \cdot (\sin t)^3 + (\cos t)^2 \cdot 3(\sin t)^2 \cdot (\sin t)'(t).$$

(7-2 b) の右辺は、 $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ とおくと $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}$ と表わされる。一般に、[定理 7-1-1] と類似の方法で次の定理を証明することができる。

定理 7-2-2 (連鎖定理)

開区間 I 上で定義された $\mathbb{R}^2$ に値をもつ関数 $l(t) = (x(t), y(t))$ と領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ とは合成可能であるとする。 l が $c \in I$ で微分可能で（すなわち、関数 $x(t), y(t)$ が c で微分可能で）、 f が点 $l(c) \in D$ で微分可能ならば、合成関数 $f \circ l$ も c で微分可能で、

$$(7-2 \text{ c}) \quad \frac{d(f \circ l)}{dt}(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(l(c)) \cdot \frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(l(c)) \cdot \frac{dy}{dt}(c)$$

が成り立つ。したがって、 l と f が共に微分可能ならば合成関数 $f \circ l$ も微分可能である。

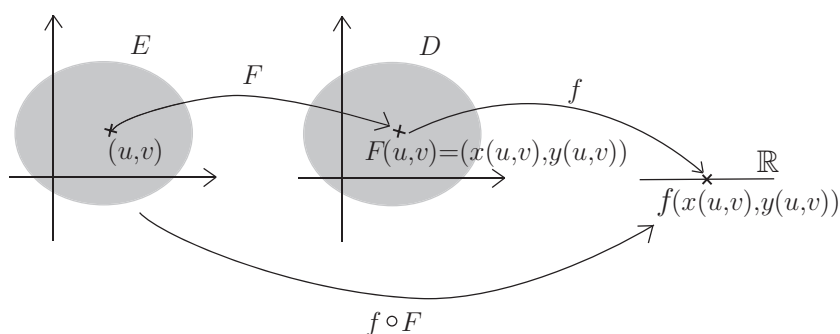
注意 7-2-3 上の公式 (7-2 c) は、大雑把には、次のように書ける。

$$(7-2 \text{ d}) \quad \frac{d(f \circ l)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

大雑把と書いた理由は、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は本来それぞれ $\frac{\partial f}{\partial x} \circ l, \frac{\partial f}{\partial y} \circ l$ と書かれるべきだからである。

● 7-3 : 合成関数とその微分可能性 (その 3)

$f = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上で定義された関数とし、 $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 E 上で定義され、 $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数とする。 F と f が**合成可能**であるとは、



(7-3 a) 全ての $(u, v) \in E$ に対して $F(u, v) \in D$

となるときをいう。このとき、各 $(u, v) \in E$ に対して $f(F(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v))$ を対応させる関数が定まる。この関数を $f \circ F$ と表わし、 F と f の**合成関数**という：

$$(f \circ F)(u, v) = f(F(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v)).$$

例 7-3-1 関数 $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) と関数 $f(x, y) = xy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) との合成関数 $f \circ F$ は次式で与えられる：

$$(f \circ F)(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2 \cos \theta \sin \theta.$$

定理 7-3-2 (連鎖定理)

領域 E 上で定義された $\mathbb{R}^2$ 値関数 $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ と領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ は合成可能であるとする。 F が $(a, b) \in E$ で微分可能で（すなわち、関数 $x(u, v), y(u, v)$ が (a, b) で微分可能で）、 f が点 $F(a, b) \in D$ で微分可能ならば、合成関数 $f \circ F$ も (a, b) で微分可能であり、次式が成り立つ：

$$(7-3 b) \quad \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(F(a, b)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(F(a, b)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(a, b),$$

$$(7-3 c) \quad \frac{\partial(f \circ F)}{\partial v}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(F(a, b)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(F(a, b)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(a, b).$$

したがって、 F と f が共に微分可能ならば合成関数 $f \circ F$ も微分可能である。

注意 7-3-3 上の公式 (7-3 b), (7-3 c) は、大雑把には、次のように書ける。

$$(7-3 d) \quad \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$(7-3 e) \quad \frac{\partial(f \circ F)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

例 7-3-4 $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された微分可能な関数とする。 $f(x, y)$ を

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = 2uv \end{cases} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

とおくことによって、 u, v を変数とする関数とみなす。つまり、

$$\tilde{f}(u, v) = f(u^2 + v^2, 2uv)$$

によって定義される関数 $\tilde{f}(u, v)$ を考える。このとき、連鎖定理により、

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2v, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2u$$

となる。但し、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, 2uv), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, 2uv)$$

である。次の等式が成り立つ：

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u}{2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{v}{2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}.$$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 7 回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 次の に適当な言葉や数式を入れなさい。

- 連鎖定理とは のことをいう。2 変数以下の関数同士の合成については、1 変数同士の合成を除き、以下の 3 種類がある。
- 領域 D 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ と開区間 I 上で定義された関数 $\varphi = \varphi(t)$ は合成可能で、ともに微分可能であるとする。このとき、合成関数 $\varphi \circ f$ は

$$(\varphi \circ f)(x, y) = \text{}$$

により定義され、合成関数 $\varphi \circ f$ の偏導関数は公式

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(x, y) = \text{}, \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(x, y) = \text{}$$

によって求められる。

- 開区間 I 上で定義された $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数 $l(t) = (x(t), y(t))$ と領域 D 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は合成可能で、ともに微分可能であるとする。このとき、合成関数 $f \circ l$ は

$$(f \circ l)(t) = \text{}$$

により定義され、合成関数 $f \circ l$ の導関数は公式

$$\frac{d(f \circ l)}{dt} = \text{}$$

によって求められる。

- 領域 E 上で定義された $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数 $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ と領域 D 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は合成可能で、ともに微分可能であるとする。このとき、合成関数 $f \circ F$ は

$$(f \circ F)(u, v) = \text{}$$

により定義され、合成関数 $f \circ F$ の偏導関数は公式

$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial u} = \text{},$$

$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial v} = \text{}$$

によって求められる。

Q2. 第 7 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。