## §7. 連鎖定理

合成関数の偏微分規則は連鎖定理と呼ばれている。この節では、2 変数関数と 1 変数関数との合成、曲線 (= 1 変数 $\mathbb{R}^2$ 値関数) と 2 変数関数との合成、2 変数 $\mathbb{R}^2$ 値関数と 2 変数関数との合成の 3 種類について、連鎖定理を述べ、その計算例を示す。

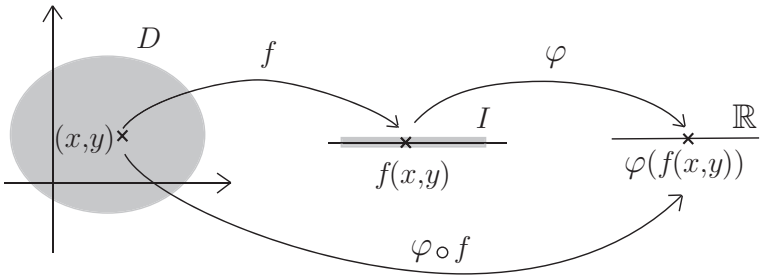
### ● 7-1：合成関数とその微分可能性 (その 1)

$f = f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D$ 上で定義された関数とし、$\varphi = \varphi(z)$ を $\mathbb{R}$ の部分集合 $I$ 上で定義された関数とする。$f$ と $\varphi$ が**合成可能**であるとは、

(7-1 a) すべての $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) \in I$

となるときをいう。このとき、各 $(x,y) \in D$ に対して $\varphi(f(x,y))$ を対応させる関数が定まる。この関数を $\varphi \circ f$ と表わし、$f$ と $\varphi$ の**合成関数**という：

(7-1 b) $$(\varphi \circ f)(x,y) = \varphi(f(x,y))$$




**定理 7-1-1**

領域 $D$ 上で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ と開区間 $I$ 上で定義された関数 $\varphi(z)$ は合成可能であるとする。$f$ が点 $(a,b) \in D$ で微分可能で、$\varphi$ が $c = f(a,b) \in I$ で微分可能ならば、合成関数 $\varphi \circ f$ も $(a,b)$ で微分可能であり、次式が成り立つ：

(7-1 c) $$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x}(a,b) = \varphi'(f(a,b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial y}(a,b) = \varphi'(f(a,b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

したがって、$f$ と $\varphi$ が共に微分可能ならば合成関数 $\varphi \circ f$ も微分可能であり、$D$ 上の関数として次式が成り立つ：

(7-1 d) $$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x} = (\varphi' \circ f) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial y} = (\varphi' \circ f) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

**例 7-1-2** 関数 $F(x,y) = \sin(xy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ は、関数 $f(x,y) = xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ と関数 $\varphi(z) = \sin z$ $(z \in \mathbb{R})$ の合成関数 $\varphi \circ f$ に等しい。$f$ と $\varphi$ は微分可能であるから、$F = \varphi \circ f$ も微分可能であり、

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \sin'(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = (\cos xy)y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \sin'(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = (\cos xy)x.$$

([**定理 7 - 1 - 1**] **の証明**)

$f$ は点 $(a,b) \in D$ で全微分可能なので、

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

とおくと、0 に十分近い任意の実数 $h,k$ について、

$$(\sharp 1) \qquad f(a+h,b+k) - f(a,b) = \alpha h + \beta k + o_1(h,k), \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

となる $(0,0)$ の十分近くで定義された関数 $o_1(h,k)$ が存在する。同様に、$\varphi$ は点 $c = f(a,b) \in I$ で微分可能なので、

$$\gamma = \varphi'(c)$$

とおくと、0 に十分近い任意の実数 $\varepsilon$ について、

$$(\sharp 2) \qquad \varphi(c+\varepsilon) - \varphi(c) = \gamma\varepsilon + o_2(\varepsilon), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{o_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

となる 0 の十分近くで定義された関数 $o_2(\varepsilon)$ が存在する。さて、

$$\begin{aligned}\varphi(f(a+h,b+k)) - \varphi(f(a,b)) &= \varphi(f(a,b) + \alpha h + \beta k + o_1(h,k)) - \varphi(c) \\ &= \varphi(c + \underbrace{\alpha h + \beta k + o_1(h,k)}) - \varphi(c)\end{aligned}$$

となる。ここで、波線部分を $\varepsilon(h,k)$ とおくと、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (\alpha h + \beta k + o_1(h,k)) = 0$$

であるから、$h,k$ が 0 に十分近いときには、$\varepsilon(h,k)$ も十分 0 に近い。したがって、(♯2) を適用することができて、

$$\varphi(f(a+h,b+k)) - \varphi(f(a,b)) = \gamma\alpha h + \gamma\beta k + \gamma o_1(h,k) + o_2(\varepsilon(h,k))$$

となる。

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\gamma o_1(h,k) + o_2(\varepsilon(h,k))}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

であるから、合成関数 $\varphi \circ f$ は $(a,b)$ で全微分可能である。また、

$$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x}(a,b) = \gamma\alpha = \varphi'(f(a,b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b),$$

$$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial y}(a,b) = \gamma\beta = \varphi'(f(a,b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

である。 □

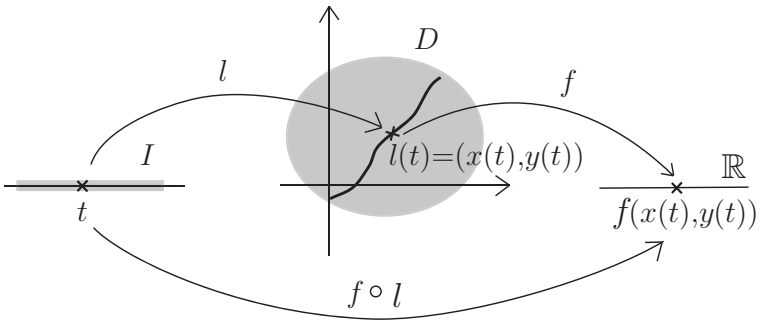
**● 7 - 2 : 合成関数とその微分可能性 (その 2)**

$f = f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D$ 上で定義された関数とし、$l(t) = (x(t), y(t))$ を $\mathbb{R}$ の部分集合 $I$ 上で定義され $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数とする。$l$ と $f$ が**合成可能**であるとは、

$$(7\text{-}2\text{ a}) \qquad \text{すべての } t \in I \text{ に対して } l(t) \in D$$

となるときをいう。このとき、各 $t \in I$ に対して $f(l(t)) = f(x(t),y(t))$ を対応させる関数が定まる。この関数を $f \circ l$ と表わし、$l$ と $f$ の**合成関数**という：

$$(f\circ l)(t) = f(l(t)) = f(x(t),y(t)).$$




**例 7 - 2 - 1** 関数 $l(t) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbb{R})$ と関数 $f(x, y) = x^2y^3$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ に対して、

(7 - 2 b) $$(f \circ l)(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2(\sin t)^3 \quad (t \in \mathbb{R})$$

である。これは微分可能であり、その導関数は次のように計算される。

(7 - 2 c) $$\frac{d(f \circ l)}{dt}(t) = 2(\cos t) \cdot (\cos t)' \cdot (\sin t)^3 + (\cos t)^2 \cdot 3(\sin t)^2 \cdot (\sin t)'(t).$$

(7 - 2 c) の右辺は、$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t$ とおくと $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}$ と表わされる。一般に、[定理 7 - 1 - 1] と類似の方法で次の定理を証明することができる。

**定理 7 - 2 - 2 (連鎖定理)**
開区間 $I$ 上で定義された $\mathbb{R}^2$ に値をもつ関数 $l(t) = (x(t), y(t))$ と領域 $D$ 上で定義された関数 $f(x, y)$ とは合成可能であるとする。$l$ が $c \in I$ で微分可能で（すなわち、関数 $x(t), y(t)$ が $c$ で微分可能で)、$f$ が点 $l(c) \in D$ で微分可能ならば、合成関数 $f \circ l$ も $c$ で微分可能で、

(7 - 2 d) $$\frac{d(f \circ l)}{dt}(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(l(c)) \cdot \frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(l(c)) \cdot \frac{dy}{dt}(c)$$

が成り立つ。したがって、$l$ と $f$ が共に微分可能ならば合成関数 $f \circ l$ も微分可能である。

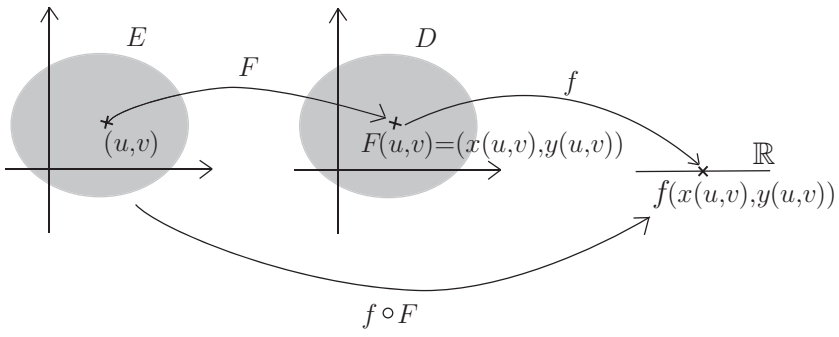
**注意 7 - 2 - 3** 上の公式 (7 - 2 d) は、大雑把には、次のように書ける。

(7 - 2 e) $$\frac{d(f \circ l)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

大雑把と書いた理由は、$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は本来それぞれ $\frac{\partial f}{\partial x} \circ \ell,\ \frac{\partial f}{\partial y} \circ \ell$ と書かれるべきだからである。

## ● 7 - 3 : 合成関数とその微分可能性 (その 3)

$f = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D$ 上で定義された関数とし、$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $E$ 上で定義され、$\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数とする。$F$ と $f$ が**合成可能**であるとは、



(7 - 3 a)　　すべての $(u,v) \in E$ に対して $F(u,v) \in D$

となるときをいう。このとき、各 $(u,v) \in E$ に対して $f(F(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v))$ を対応させる関数が定まる。この関数を $f \circ F$ と表わし、$F$ と $f$ の**合成関数**という：

$$(f \circ F)(u,v) = f(F(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v)).$$

**例 7 - 3 - 1**　関数 $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ と関数 $f(x,y) = xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ との合成関数 $f \circ F$ は次式で与えられる：

$$(f \circ F)(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2 \cos\theta \sin\theta.$$

**定理 7 - 3 - 2 (連鎖定理)**

領域 $E$ 上で定義された $\mathbb{R}^2$ 値関数 $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ と領域 $D$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ は合成可能であるとする。$F$ が $(a,b) \in E$ で微分可能で（すなわち、関数 $x(u,v), y(u,v)$ が $(a,b)$ で微分可能で）、$f$ が点 $F(a,b) \in D$ で微分可能ならば、合成関数 $f \circ F$ も $(a,b)$ で微分可能であり、次式が成り立つ：

(7 - 3 b)　　$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial u}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(F(a,b)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(F(a,b)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(a,b),$$

(7 - 3 c)　　$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial v}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(F(a,b)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(F(a,b)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(a,b).$$

したがって、$F$ と $f$ が共に微分可能ならば合成関数 $f \circ F$ も微分可能である。

**注意 7 - 3 - 3**　上の公式 (7 - 3 b),(7 - 3 c) は、大雑把には、次のように書ける。

(7 - 3 d)　　$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

(7 - 3 e)　　$$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

**例 7 - 3 - 4**　$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された微分可能な関数とする。$f(x,y)$ を

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = 2uv \end{cases} \qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

とおくことによって、$u, v$ を変数とする関数とみなす。つまり、

$$\tilde{f}(u,v) = f(u^2 + v^2, 2uv)$$

によって定義される関数 $\tilde{f}(u,v)$ を考える。このとき、連鎖定理により、

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2v, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2u$$

となる。但し、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, 2uv), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, 2uv)$$

である。次の等式が成り立つ：

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u}{2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{v}{2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}.$$

2026 年 11 月 5 日

**数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第７回・学習内容チェックシート**

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の □ に適当な言葉や数式を入れなさい。

- 連鎖定理とは □ のことをいう。2 変数以下の関数同士の合成については、1 変数同士の合成を除き、以下の 3 種類がある。
- 領域 $D$ 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ と開区間 $I$ 上で定義された関数 $\varphi = \varphi(t)$ は合成可能で、ともに微分可能であるとする。このとき、合成関数 $\varphi \circ f$ は

  $$(\varphi \circ f)(x, y) = \boxed{\phantom{00}}$$

  により定義され、合成関数 $\varphi \circ f$ の偏導関数は公式

  $$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(x, y) = \boxed{\phantom{00}}, \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(x, y) = \boxed{\phantom{00}}$$

  によって求められる。
- 開区間 $I$ 上で定義された $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数 $l(t) = (x(t), y(t))$ と領域 $D$ 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は合成可能で、ともに微分可能であるとする。このとき、合成関数 $f \circ l$ は

  $$(f \circ l)(t) = \boxed{\phantom{00}}$$

  により定義され、合成関数 $f \circ l$ の導関数は公式

  $$\frac{d(f \circ l)}{dt} = \boxed{\phantom{00}}$$

  によって求められる。
- 領域 $E$ 上で定義された $\mathbb{R}^2$ に値を持つ関数 $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ と領域 $D$ 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は合成可能で、ともに微分可能であるとする。このとき、合成関数 $f \circ F$ は

  $$(f \circ F)(u, v) = \boxed{\phantom{00}}$$

  により定義され、合成関数 $f \circ F$ の偏導関数は公式

  $$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial u} = \boxed{\phantom{00}},$$

  $$\frac{\partial(f \circ F)}{\partial v} = \boxed{\phantom{00}}$$

  によって求められる。

Q2. 第７回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。