§8. 行列式の定義

行列式は連立一次方程式の解の公式を探求する中で発見された。ここでは、一見すると複雑で理解しにくい行列式の定義を理解する。

● 8-1：2 次と 3 次の行列式の定義

$a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ を定数とする連立一次方程式

(8-1 a)
$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

が唯一の解を持つのは $ad - bc \neq 0$ が成り立つときであり、そのときの解は $x = \dfrac{pd - qb}{ad - bc}$, $y = \dfrac{qa - pc}{ad - bc}$ により与えられることが確かめられる。

実数係数の 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$ を

(8-1 b)
$$|A| = ad - bc$$

と定め、A の**行列式** (determinant) という。行列式を用いると、連立一次方程式 (8-1 a) が唯一の解を持つための必要十分条件とそのときの解が次のように与えられる：(8-1 a) の係数行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を A とおくと、

$$\text{連立一次方程式 (8-1 a) が唯一の解を持つ} \iff |A| \neq 0$$

であり、このとき解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{|A|}$$

により与えられる。

例 8-1-1 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ の係数行列を A とおく：$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$|A| = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$ であるから、与えられた連立一次方程式唯一の実数解を持つ。その解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8 \cdot 2 - 3 \cdot 5}{1} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 \cdot 5 - 8 \cdot 1}{1} = 2$$

により与えられる。 □

次に、$a_{ij}, p, q, r \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ を定数とする連立一次方程式

(8-1 c)
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = p \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = q \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = r \end{cases}$$

を考える。この連立一次方程式の係数行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$ を

(8-1 d)
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

により定め、A の**行列式**という。このとき、

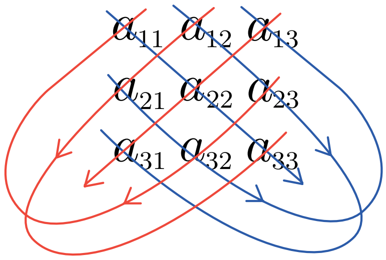
$$\text{連立一次方程式 (8-1 c) が唯一の解を持つ} \iff |A| \neq 0$$

であり、このとき解は

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & a_{12} & a_{13} \\ q & a_{22} & a_{23} \\ r & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & p & a_{13} \\ a_{21} & q & a_{23} \\ a_{31} & r & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & p \\ a_{21} & a_{22} & q \\ a_{31} & a_{32} & r \end{vmatrix}}{|A|}$$

により与えられる。この解の公式は**クラメル (Cramer) の公式**と呼ばれている。

(8-1 d) の右辺は 6 個の項からなっているが、次の図のように、青い線の通っている数をそれぞれ掛けたものから、赤い線の通っている数をそれぞれ掛けたものを引いたものに一致していることがわかる。この計算方法は**サラスの方法**と呼ばれている。なお、サラスの方法で計算できるのは、ここで述べた 3 次行列式のみであって、まだ説明していないが、4 次以上の行列式の計算には適用できないので注意されたい。



例 8-1-2 $p,q,r\in\mathbb{R}$ を実定数とし、連立一次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x+3y=p \\ 2x+4y+z=q \\ x+2y+4z=r \end{cases}$$

を考える。係数行列を A とおくと、$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ であり、その行列式は

$$|A|=1\cdot4\cdot4+3\cdot1\cdot1+0\cdot2\cdot2-0\cdot4\cdot1-3\cdot2\cdot4-1\cdot2\cdot1=-7\neq0$$

を満たす。したがって、連立一次方程式 $(*)$ は唯一の解を持つ。

$$\begin{vmatrix} p & 3 & 0 \\ q & 4 & 1 \\ r & 2 & 4 \end{vmatrix}=14p-12q-3r,\quad \begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ 2 & q & 1 \\ 1 & r & 4 \end{vmatrix}=-7p+4q-r,\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & p \\ 2 & 4 & q \\ 1 & 2 & r \end{vmatrix}=q-2r$$

であるから、連立一次方程式 $(*)$ の解は、クラメルの公式より、

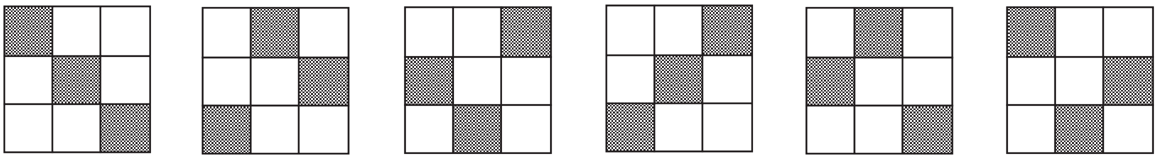
$$x=\frac{-14p+12q+3r}{7},\quad y=\frac{7p-4q+r}{7},\quad z=\frac{-q+2r}{7}$$

により与えられる。 □

● 8-2：3 次行列式と置換と符号

(8-1 d) により与えられる 3 次行列式 $|A|$ の 6 つの項と置換、符号との関係を調べよう。その 6 つの項はそれぞれ、符号を無視すれば、次図で影のついている部分に相当する A の成分の数字を掛け合わせたものになっている。

これらのどれについても、各行から 1 つずつ選ばれて (影がつけられて) いて、列番号がすべて異なっている。したがって、$i=1,2,3$ に対して、第 i 行から第 j_i 列成分が選ばれていると

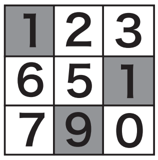


すると、3 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}$ を対応させせることができる。上の図の場合、左から順に次のように置換が対応している：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

これらの置換の符号は順に $+, +, +, -, -, -$ であるから、(8-1 d) の右辺の各項の符号と一致している。こうして、(8-1 d) は次のように書き換えられることがわかる：

(8-2 a) $$|A| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$



例 8-2-1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、左図のような正方形の選び方に対応する項は $\operatorname{sgn}(2\ 3)\ 1 \cdot 1 \cdot 9 = -9$ である。

2 次行列式についても同じ考えを適用することができて、実際に、次式が成り立つ：

(8-2 b) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}.$$

● 8-3：n 次行列式の定義

2 次と 3 次の行列式の置換を用いた表示 (8-2 a), (8-2 b) を一般化して、n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ の行列式 $|A|$ を次のように定義しよう。

(8-3 a) $$|A| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

右辺の和の各項は、3 次行列式のときと同様に解釈することができる。つまり、A に、各成分がちょうど 1 つの正方形の中に収まるように、縦横に $(n+1)$ 本ずつ線を引いて、第 1 行から順に、次の約束に従って n 個の正方形を選ぶ。

約束 (★) 「第 i 行の正方形は第 1 行から第 $(i-1)$ 行で選んだどの正方形とも同じ列にないように選ぶ」

そのような正方形の選び方は n 文字の置換 σ を定める。選び出された n 個の正方形の中に書き込まれた数

$$a_{1\sigma(1)},\ a_{2\sigma(2)},\ \ldots,\ a_{n\sigma(n)}$$

の積をとり、その値に符号 $\operatorname{sgn} \sigma$ を掛けたものが (8-3 a) の右辺の和における各項である。

例 8-3-1 $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) = 120.$$

注意. 行列式の定義に従うと、$n!$ 個の和を計算しなければならず、非常に大変である。この節では行列式の定義の理解を目標にしているので、計算方法については深入りしないが、余因子展開を用いてよりサイズの小さい行列式に還元させて計算するのがよい。ただし，直ちに余因子展開をしてしまうと、$n!$ 個の和を計算するのと同じことになってしまうので、行列式の性質

- ある行を t 倍すると値は t 倍になる。
- 2つの行を入れ替えると符号が変わる。
- 1つの行に他の行の t 倍を加えても、行列式の値は変わらない。
- 転置をとっても (すなわち、行と列を入れ替えても) 行列式の値は変わらない。

等を用いて 1 つの行や列に 0 をできるだけ増やしてから、その行や列について余因子展開するようにする。

● 8 - 4 : 対角行列、三角行列の行列式

上三角行列 $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ や下三角行列 $L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の行列式の値は、定義より

$$|U| = |L| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

である。一般に、次が成り立つ：

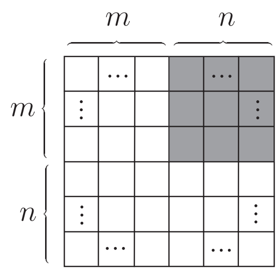
定理 8 - 4 - 1

A を m 次正方行列、B を n 次正方行列、O を零行列とすると、

(1) $$\begin{vmatrix} A & \mathrm{O} \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

(2) $$\begin{vmatrix} A & C \\ \mathrm{O} & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

(**証明**)



(1) 右図において、右上の mn 個の正方形が 1 つでも含まれるような選び方をすると、左辺の行列式を (♯) に基づいて書いたときの和における、その選び方に対応する項が 0 になるので、$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ とおくと、

(8 - 4 a) $$\begin{vmatrix} A & \mathrm{O} \\ C & B \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\sigma\in S_m,\\ \tau\in S_n}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau')\ a_{1\sigma(1)}\cdots a_{m\sigma(m)}b_{1\tau(1)}\cdots b_{n\tau(n)}$$

となる。ここで、右辺の式の中の τ' は $\tau' = \begin{pmatrix} m+1 & m+2 & \cdots & m+n \\ m+\tau(1) & m+\tau(2) & \cdots & m+\tau(n) \end{pmatrix}$ によって定義される "置換" を表わし、$\sigma\tau'$ は $(m+n)$ 文字の置換

$$\sigma\tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & m+n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(m) & m+\tau(1) & m+\tau(2) & \cdots & m+\tau(n) \end{pmatrix}$$

を表わす。$\mathrm{sgn}(\sigma\tau') = (\mathrm{sgn}\,\sigma)(\mathrm{sgn}\,\tau)$ であるから、(8 - 4 a) $= |A||B|$ を得る。

(2) (1) の転置をとればよい。 □