§8. 線形写像の合成と行列の積

前節では、(m,n)-行列 A から線形写像 $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が定義されること、および、任意の線形写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ はある (m,n)-行列 A によって $F = T_A$ と表されることを学んだ。ここでは、A が正則行列の場合に、線形写像 T_A が持つ特徴を考察する。そのために、最初に、写像に対する基礎概念–全射、単射、全単射–を学び、次に、(l,m)-行列 A と (m,n)-行列 B から定まる線形写像 $T_A,\ T_B$ と積 AB から定まる線形写像 T_{AB} との間の関係について調べる。

● 8 - 1 ： 全射、単射、全単射

$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする。

(1) f が**単射**であるとは、X の異なる２つの元が f によって Y の異なる２つの元に写されるときをいう。すなわち、次が成り立つときをいう。

(8 - 1 a)　　$x,\ x' \in X$ が $x \neq x'$ であれば、$f(x) \neq f(x')$ となる。

(2) f が**全射**であるとは、Y に属するどの元も X に属するある元の f による像となっているときをいう。すなわち、次が成り立つときをいう。

(8 - 1 b)　　各 $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

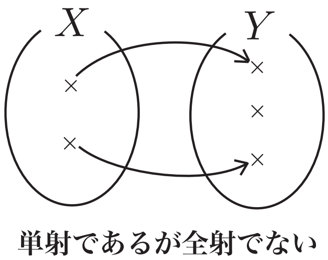
(3) f が**全単射**であるとは、f が全射でありかつ単射であるときをいう。

注意 1°. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるための条件は、対偶をとることにより、

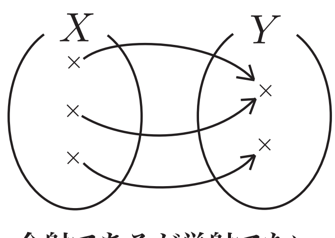
(8 - 1 c)　　すべての $x, x' \in X$ について「$f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'$」

であることと同値である。したがって、写像が単射であることを証明したいとき、この条件が成り立つことを確かめても構わない。

注意 2°. 単射と全射は次のようなときに役に立つ。集合 X が与えられていて、X から別の集合 Y へ何か写像 f を作ったとする。もし、f が単射であれば、X において区別される 2 元は f で写しても Y において区別される。つまり、f で写しても「情報が落ちない」ので、舞台を Y に移して考えることができる。他方、集合 Y が与えられたとき、集合 X から Y へ全射な写像 f を作ることができれば、Y の中のどんな元も f を経由して X の元を使って表わすことができる。



単射であるが全射でない



全射であるが単射でない

例 8 - 1 - 1

(1) $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義される関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は、全射でも単射でもない。実際、$f(1) = 1 = f(-1)$ となるので単射でなく、$f(x) = -1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないから ($\because$ 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = x^2 \geq 0$) 全射でない。

(2) $\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とし、写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $f(n) = 2n$ によって定義する。f は単射であるが全射でない。実際、$n \neq m$ ならば $2n \neq 2m$ なので、f は単射である。これに対して、$f(n) = 1$ となる $n \in \mathbb{Z}$ は存在しないので、f は全射でない。

● 8 - 2： 恒等写像

集合 X $(\neq \varnothing)$ に対して、X の各元 x を同じ x に写す X から X への写像を考えることができる。この写像を X 上の**恒等写像**という。X 上の恒等写像を $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ という記号で表わす。恒等写像は、当然ながら、全単射である。

● 8 - 3： 逆写像

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射であるとき、任意の $y \in Y$ について $f(x) = y$ となる $x \in X$ は存在し（$\because$ f は全射)、かつ、そのような $x \in X$ は唯一つ（$\because$ f は単射）である。したがって、全単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対しては、各 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ を対応させることによって、Y から X への写像を定めることができる。この写像を f の**逆写像**といい、$f^{-1} : Y \longrightarrow X$ または単に f^{-1} によって表わす。記号 f^{-1} は「エフ インヴァース」と読む。

逆写像の定義により、$f : X \longrightarrow Y$ が全単射であるとき、$x \in X,\ y \in Y$ について

(8 - 3 a)
$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

が成り立つ。したがって、全単射 $f : X \longrightarrow Y$ の逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ は全単射であり、$(f^{-1})^{-1} = f$ が成り立つ。

● 8 - 4： 正則行列と全単射との関係

定理 8 - 4 - 1

(m, n)-行列 A について、

(8 - 4 a)
$$A : \text{正則} \iff T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ は全単射}$$

が成り立つ。このとき、T_A の逆写像は $T_{A^{-1}}$ によって与えられる：

(8 - 4 b)
$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}} \ .$$

(**証明**)

「$\Longrightarrow$」の証明：A は正則であるとする。正則行列の定義より、A は正方行列である。したがって、$m = n$ である。T_A が全単射であることを示す。

• T_A が単射であること：$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ に対して $T_A(\mathbf{x}) = T_A(\mathbf{x}')$ であったと仮定する。すると、

$(*)$
$$A\mathbf{x} = A\mathbf{x}'$$

が成り立つ。A は正則なので、逆行列 A^{-1} が存在する。そこで $(*)$ の両辺に左から A^{-1} を掛ける。すると、$\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ が得られる。よって、T_A は単射である。

• T_A が全射であること：任意に $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ をとる。このとき、n 次元ベクトル

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$$

は $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ を満たす。したがって、T_A は全射である。

以上で T_A は全単射であることが示された。T_A の逆写像は、$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$$

となることから、

$$T_{A^{-1}} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{y} \longmapsto A^{-1}\mathbf{y}$$

によって与えられることがわかる。

「$\Longleftarrow$」の証明：

T_A は全単射であるとする。まず、$m = n$ となることを示す。“$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$” を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする：

(8-4 c) $$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このとき、“$T_A(\mathbf{e}_1), T_A(\mathbf{e}_2), \cdots, T_A(\mathbf{e}_n)$ は $\mathbb{R}^m$” の基底になる。これより、$m = n$ がわかる。

さて、T_A は全単射なので、逆写像 T_A^{-1} が存在する。逆写像の定義 (8-3 a) により、$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して

(8-4 d) $$\mathbf{e}_j = T_A(T_A^{-1}(\mathbf{e}_j)) = AT_A^{-1}(\mathbf{e}_j)$$

が成立する。そこで、行列 B を

(8-4 e) $$B = (T_A^{-1}(\mathbf{e}_1)\ T_A^{-1}(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T_A^{-1}(\mathbf{e}_n))$$

によって定義する。(8-4 d) より

(8-4 f) $$AB = (AT_A^{-1}(\mathbf{e}_1)\ AT_A^{-1}(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ AT_A^{-1}(\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \cdots\ \mathbf{e}_n) = E_n$$

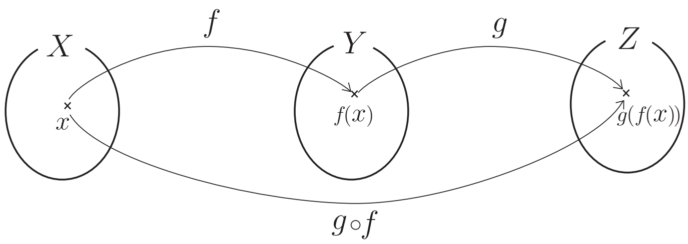
が成り立つ。両辺の行列式をとって、$|A||B| = |E_n| = 1$ が得られるから、$|A| \neq 0$ とわかる。よって、A は正則であり、$B = A^{-1}$ である。 □

● 8-5：写像の合成

写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ が与えられたとき、元 $x \in X$ をまず f で Y の元 $f(x)$ に写し、その元 $f(x)$ をさらに g で Z の元 $g(f(x))$ に写すことにより、X から Z への写像を定義することができる（次図参照)。このようにして得られる X から Z への写像を f と g の**合成写像**といい、$g \circ f : X \longrightarrow Z$ または単に $g \circ f$ と書き表わす。つまり、$g \circ f$ とは

(8-5 a) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X)$$

によって定義される X から Z への写像のことをいう。



<u>**例 8-5-1**</u> $\mathbb{R} - \{0\}$ によって、0 以外の実数全体からなる集合を表わす。

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R} - \{0\})$$

によって定義される写像 $h : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ は 2 つの写像

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x$$

の合成写像 $g \circ f$ に等しい。実際、合成写像の定義より $g \circ f$ は $\mathbb{R} - \{0\}$ から $\mathbb{R}$ への写像であり、これらはそれぞれ h の定義域と終域に一致している。さらに、任意の $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し

て $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin f(x) = \sin(\frac{1}{x}) = h(x)$ が成り立つから、$g \circ f$ と h は元の対応規則も一致している。写像の相等の定義より、これは $h = g \circ f$ であることを意味する。 □

３つの写像 $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z,\ h : Z \longrightarrow W$ について、

(8-5 b) $$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ。また、$f : X \longrightarrow Y$ が全単射なとき、逆写像の定義 (8-3 a) から

(8-5 c) $$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

が成り立つ。

● 8-6：行列の積と写像の合成

(l, m)-行列 A と (m, n)-行列 B に対して、

(8-6 a) $$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

が成り立つ。実際、行列の積は結合法則を満たすので、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ について、

$$(T_A \circ T_B)(\mathbf{x}) = T_A(T_B(\mathbf{x})) = T_A(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)(\mathbf{x}) = T_{AB}(\mathbf{x})$$

となる。

● 8-7：まとめ

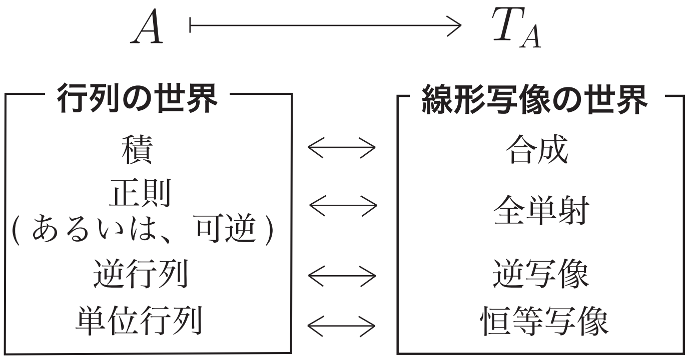
[定理 8-4-1] と (8-6 a) により、行列の世界における積、正則、逆行列といった概念が、線形写像の世界における合成、全単射、逆写像という概念に対応していることがわかる。また、n 次単位行列 E_n から定まる線形写像 T_{E_n} は、定義より、

$$T_{E_n}(\mathbf{x}) = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

を満たすから、$\mathbb{R}^n$ 上の恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ に一致することがわかる:

(8-7 a) $$T_{E_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

つまり、行列の世界における単位行列は線形写像の世界における恒等写像に対応している。



No.8 2024年11月14日

線形代数2事前練習用演習問題

pre8-1. (全射・単射の定義)

$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。

$$f(n) = 2n^2 - n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

によって定義される写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) f は単射であるか否かを述べ、それを証明せよ。

(2) f は全射であるか否かを述べ、それを証明せよ。

pre8-2. (行列から定まる写像と全単射、逆写像)

次の式で定義される写像 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を考える：

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3x+2y \\ -7x+5y \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(1) $F = T_A$ となる 2 次正方行列 A を求めよ。

(2) F は全単射であることを示せ。さらに、その逆写像 F^{-1} を求めよ ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して、$F^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ を具体的に記述すること)。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre8-1.

(1) いくつか値を代入する、$f(m) - f(n)$ を計算する、あるいは、グラフを描くなどをして f の様子を調べて、単射になりそうかなりそうでないかの当たりをつける。

f は単射である。実際、$m, n \in \mathbb{Z}$ が $f(m) = f(n)$ を満たすとする。

$$f(m) - f(n) = (m-n)\big(2(m+n)-1\big)$$

のように因数分解されるから、$f(m) = f(n)$ より、$m - n = 0$ または $2(m+n) - 1 = 0$ となる。m, n は整数であるから、$2(m+n)$ は偶数となるので、$2(m+n) - 1 = 0$ となることはない。したがって、$m - n = 0$ すなわち、$m = n$ が成り立つ。こうして、f は単射であることが示された。

(2) いくつか値を代入する、$a = f(n)$ を n について解いてみる、あるいは、グラフを描くなどをして f の様子を調べて、全射になりそうかなりそうでないかの当たりをつける。

f は全射でない。実際、$-1 \in \mathbb{Z}$ に対して、$f(n) = -1$ を満たす $n \in \mathbb{Z}$ が存在したとすると、n は $2n^2 - n + 1 = 0$ を満たす。しかしながら、これを 2 次方程式とみて解くと、

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}$$

となり、整数にならない。このように矛盾が生じ、f は全射でないことがわかる。

pre8-2. (1) F は線形写像であるから、$F = T_A$ となる行列 A は、"$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$" を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とするとき、$A = \big(F(\mathbf{e}_1)\ F(\mathbf{e}_2)\big)$ によって求めることができる。$F(\mathbf{e}_1),\ F(\mathbf{e}_2)$ をそれぞれ計算して、

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

(2) $F = T_A$ が全単射であるための必要十分条件は A が正則なことである。今、$|A| = -1 \neq 0$ であるから A は正則である。よって、$F = T_A$ は全単射である。

F の逆写像は $F^{-1} = T_{A^{-1}}$ により与えられるから、A の逆行列を求めればよい。計算により、$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ とわかるから、逆写像 $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は

$$F^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -7x + 3y \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

により与えられる。

線形代数２・第８回 (2024 年 11 月 14 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第８回学習内容チェックシート 2024年11月14日

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ を写像とする。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

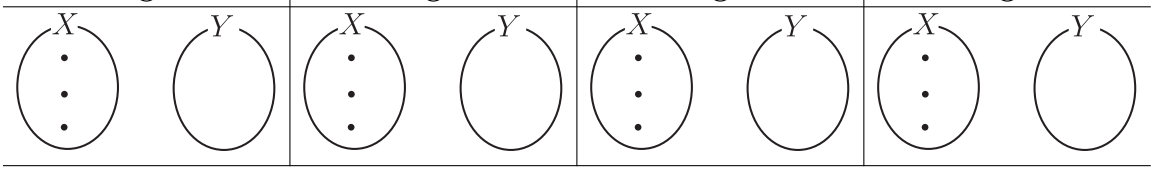
	ページ	定義
f が単射であるとは？	p.	
f が全射であるとは？	p.	
f が全単射であるとは？	p.	
X 上の恒等写像 id_X とは？	p.	
合成写像 $g \circ f$ とは？	p.	
写像 f が全単射であるとき、その逆写像 f^{-1} とは？	p.	

Q2. 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \longrightarrow Y$ が

① 単射であるが、全射でない
② 単射でないが、全射である
③ 単射でも、全射でもない
④ 単射かつ全射である

という４つの状況を考える。これらの状況を下図を用いてわかりやすく表現しなさい (Y の中に適当に有限個の点を打ち、元の対応規則を矢印で表わしなさい)。

①	②	③	④



Q3. A を (l, m)-行列、B を (m, n)-行列とする。

- 次の $\boxed{}$ に適当な言葉を入れなさい。

$$T_A \text{ が全単射} \iff A \text{ が } \boxed{}\,.$$

- 次の $\boxed{}$ の中にはどのような行列 X から定まる線形写像 T_X が入るか。書き入れなさい。

$$T_A \circ T_B = \boxed{}\,,$$
$$T_A \text{ が全単射であるとき、} (T_A)^{-1} = \boxed{}\,,$$
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = \boxed{}$$

Q4. 第８回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。