§8. 正規行列と正規変換

第６節において、エルミート計量空間上の線形変換の対角化問題はユニタリ行列による行列の対角化問題 (実計量空間の場合には直交行列による行列の対角化問題) に帰着されることを観察した。この節では、ユニタリ行列で対角化される複素正方行列がどのような性質をもつ行列なのかを決定する (実正方行列に制限すると少し微妙な問題があるので、この場合は後の節で考察する)。

● 8-1：ユニタリ行列で対角化される行列 (必要条件)

まず、$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列によって対角化されるとき、A が満たすべき条件を求める。次の補題が成り立つ。

補題 8-1-1
$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列によって対角化されるならば、$A^*A = AA^*$ である。

(**証明**)

$U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ をユニタリ行列とし、$D := U^{-1}AU$ が対角行列であると仮定する。$U^{-1} = U^*$ に注意すると、$A = UDU^{-1} = UDU^*$ と書くことができる。このとき、次が成り立つ：

$$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = (U^*)^*D^*U^*UDU^* = UD^*DU^*,$$
$$AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UDU^*(U^*)^*D^*U^* = UDD^*U^*.$$

D, D^* は対角行列であるから、$D^*D = DD^*$ を満たす。よって、$A^*A = AA^*$ となる。 □

● 8-2：正規行列と正規変換

[補題 8-1-1] により、ユニタリ行列によって対角化される行列は $A^*A = AA^*$ を満たしていなければならない。このような行列に名前をつけよう。

定義 8-2-1
(1) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ は、$A^*A = AA^*$ を満たすとき、**正規** (normal) であると呼ばれる。
(2) V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、T を V 上の $\mathbb{C}$-線形変換とする。$T^* \circ T = T \circ T^*$ が満たされるとき、T は**正規** (normal) であると呼ばれる。

例 8-2-2 (1) ユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列はすべて正規である。ここで、これらの行列は次のように定義される：

- $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列 $\iff A^*A = E_n \quad (\iff A^* = A^{-1})$,
- $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が**エルミート行列** $\iff A^* = A$,
- $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が**歪エルミート行列** $\iff A^* = -A$.

(2) ユニタリ変換、エルミート変換、歪エルミート変換はすべて正規である。但し、これらの変換は次のように定義される：$\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間 V 上の $\mathbb{C}$-線形変換 T について

- T がユニタリ変換 $\iff T^* \circ T = \mathrm{id}_V$,
- T が**エルミート変換** $\iff T^* = T$,
- T が**歪エルミート変換** $\iff T^* = -T$.

[補題 8-1-1] から、ユニタリ行列によって対角化される複素正方行列は正規行列でなければならないが、実は、この逆も正しい。すなわち、

定理 8-2-3

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$A \text{ がユニタリ行列によって対角化される} \iff A \text{ は正規行列}$$

● 8-3：固有値・固有ベクトルと代数学の基本定理

[定理 8-2-3] の十分性を証明するためには、固有値・固有ベクトルの概念と代数学の基本定理が必要である。固有値・固有ベクトルについては線形代数１、２で学んでいるが、定義を思い出しておこう。ここでは複素数の範囲で書く。

T を複素ベクトル空間 V $(\neq \{0_V\})$ 上の $\mathbb{C}$-線形変換とする。各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$W(\lambda, T) = \{\ v \in V \mid T(v) = \lambda v\ \} \tag{8-3 a}$$

は V の部分空間をなす。$W(\lambda, T) \neq \{0_V\}$ のとき、λ を T の**固有値**といい、$W(\lambda, T)$ を T の固有値 λ に属する**固有空間**といい、$W(\lambda, T)$ の 0_V でない元を λ に属する T の**固有ベクトル**という。n 次複素正方行列 A の固有値・固有ベクトルとは、A から定まる $\mathbb{C}$-線形変換 $T_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ の固有値・固有ベクトルのことである。

n 次複素正方行列 A に対して、文字 x に関する多項式

$$\Delta_A(x) = |xE_n - A| \tag{8-3 b}$$

を A の**固有多項式**という。n 次元複素ベクトル空間 V 上の $\mathbb{C}$-線形変換 $T : V \longrightarrow V$ に対しては、V の基底を１つとり、その基底に関する行列表示を A として、

$$\Delta_T(x) = |xE_n - A| \tag{8-3 c}$$

と定める。これを線形変換 T の**固有多項式**という。$\Delta_T(x)$ は V の基底の選び方に依らない。次が成り立つ：$\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$\lambda \text{ は } T \text{ の固有値} \iff \Delta_T(\lambda) = 0. \tag{8-3 d}$$

このことから、T の固有値を求めるには、方程式 $\Delta_T(x) = 0$ を複素数の範囲内で解けばよい。この方程式が解を持つか否か、言い換えれば、T の固有値が存在するか否かは明らかではないが、次の代数学の基本定理により、常に存在することがわかる。

定理 8-3-1 (代数学の基本定理)

定数でない複素数係数の任意の多項式

$$P(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$$

$$(\text{但し、}\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \text{ は複素数の定数})$$

に対して、$P(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在する。

この定理の１つの証明は、来年度学ぶ「幾何学１」の中で与えらえる。今は認めよう。

● 8-4：[定理 8-2-3] の証明

代数学の基本定理により、複素正方行列 A は ($\mathbb{C}$ 内に少なくとも１つ) 固有値を持つことがわかる。このことを使って、次の補題が証明される。

補題 8-4-1

任意の複素正方行列 A はユニタリ行列によって上三角化可能である。すなわち、あるユニタリ行列 U に対して $U^{-1}AU$ は上三角行列となる：

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{O} & & * \end{pmatrix} \qquad (* \text{ の部分にはそれぞれ適当な数字が入る})$$

(**証明**)

任意の $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列によって上三角化可能であることを n に関する帰納法で証明する。

Ⅰ. $n=1$ のとき $A=(a_{11})$ となっているので、補題の主張は成り立つ。

Ⅱ. $n>1$ とし、$(n-1)$ 次正方行列について補題の主張は正しいと仮定する。α_1 を A の $\mathbb{C}$ 上の固有値とすると、$A\mathbf{p}_1 = \alpha_1 \mathbf{p}_1$ となる $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}^n$ が存在する。$\mathbf{p}_1$ に $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n$ を付け加えて $\mathbb{C}^n$ の基底 "$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n$" を作る。この基底に対してグラム-ミュミットの直交化法を適用して、$\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 "$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$" が得られる。この基底に関する $T_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ の行列表示は

$$\left(\begin{array}{c:c} \alpha_1 & * \ \cdots \ * \\ \hdashline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$$

の形になる ($\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|}\mathbf{p}_1$ であるから、$A\mathbf{u}_1 = \alpha_1 \mathbf{u}_1$ である)。したがって、$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)$ とおくと、U はユニタリで、

$$U^{-1}AU = \left(\begin{array}{c:c} \alpha_1 & * \ \cdots \ * \\ \hdashline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$$

となる。$(n-1)$ 次正方行列 $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ に対して帰納法の仮定を適用することにより、

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる $(n-1)$ 次ユニタリ行列 $Q \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ が存在することがわかる。$R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を

$$R = \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hdashline \mathbf{0} & Q \end{array}\right)$$

によって定義すると、$R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ はユニタリ、したがって、UR もユニタリであり、

$$\begin{aligned}(UR)^{-1}A(UR) &= R^{-1}(U^{-1}AU)R \\ &= \left(\begin{array}{c:c} \alpha_1 & * \ \cdots \ * \\ \hdashline \mathbf{0} & Q^{-1}BQ \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:ccc} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ \hdashline & \alpha_2 & & * \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & \text{O} & & \alpha_n \end{array}\right)\end{aligned}$$

となる。これで、n 次複素正方行列に対しても補題の主張が正しいことが証明された。 □

補題 8-4-2

複素正方行列が正規で、かつ、上三角行列ならば、対角行列である。

(**証明**)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{O} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ に対して

$$A^*A = \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 & & * & \\ & \sum_{k=1}^{2} |a_{k2}|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & * & & \sum_{k=1}^{n} |a_{kn}|^2 \end{pmatrix}, \quad AA^* = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} |a_{1k}|^2 & & * & \\ & \sum_{k=2}^{n} |a_{2k}|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & * & |a_{nn}|^2 \end{pmatrix}$$

である。A が正規ならば、$A^*A = AA^*$ となるから、その第 (i,i)-成分を比較して、

$$\sum_{k=1}^{i} |a_{ki}|^2 = \sum_{k=i}^{n} |a_{ik}|^2 \tag{8-4 a}$$

を得る。(8 - 4 a) を $i = 1$ のときに考えると $\sum_{k=2}^{n} |a_{1k}|^2 = 0$ が得られ、$a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$ であることがわかる。(8 - 4 a) を $i = 2$ のときに考えると $a_{12} = 0$ であることから、$\sum_{k=3}^{n} |a_{2k}|^2 = 0$ が得られ、$a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$ であることがわかる。次に、(8 - 4 a) を $i = 3$ のときに考えると $a_{13} = a_{23} = 0$ であることから、$\sum_{k=4}^{n} |a_{3k}|^2 = 0$ が得られ、$a_{34} = \cdots = a_{3n} = 0$ であることがわかる。以下、同様に続けて、対角成分以外の成分はすべて 0 であることがわかる。 □

(**[定理 8 - 2 - 3] の証明**)

$\Longrightarrow$) は [補題 8 - 1 - 1] で示されているので、$\Longleftarrow$) を証明する。

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を正規行列とする。[補題 8 - 4 - 1] より、$B := U^{-1}AU$ が上三角行列となるようなユニタリ行列 $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が存在する。U はユニタリであり、A は正規であるから、B も正規である (各自確かめよ)。したがって、[補題 8 - 4 - 2] により、B は対角行列である。すなわち、A はユニタリ行列 U により対角化される。 □

[定理 8 - 2 - 3] から直ちに次が従う。

系 8 - 4 - 3

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、T を V 上の $\mathbb{C}$-線形変換とする。このとき、次の 2 つは同値である。

① T は正規変換である。

② V には T の固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する。

[例 8 - 2 - 2(2)] と [定理 8 - 2 - 3] からまた、次の結果を得る。

系 8 - 4 - 4

(1) ユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列はユニタリ行列により対角可能である。

(2) $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間 V 上のユニタリ変換、エルミート変換、歪エルミート変換は、V の正規直交基底を適当に選ぶと、対角行列で表わされる。

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre8-1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ は正規行列であることを確認し、それをユニタリ行列によって対角化せよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre8-1. A は $A^{\mathrm{T}} = -A$ を満たす実行列であるから、$A^*A = -A^2 = AA^*$ を満たす。よって、A は正規である。

A をユニタリ行列によって対角化するために、まず、A の固有値と A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^3$ の 1 組の基底を求める。

A の固有多項式は $\varDelta_A(x) = x(x^2+9)$ であることがわかるので、A の ($\mathbb{C}$ の範囲内での) 固有値は $0, \pm 3i$ である。そのそれぞれについて固有空間を求めると以下のようになることがわかる。

$$W(0, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad W(\pm 3i, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \pm 3i \\ 4 \\ 1 \mp 3i \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C} \right\} \text{ (複号同順)}$$

A は正規行列であるから、異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交するので、各固有空間の中から

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3i \\ 4 \\ 1-3i \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-3i \\ 4 \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

を選ぶと、これらは互いに直交し、大きさ 1 であることがわかる。よって、

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+3i}{6} & \frac{1-3i}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1-3i}{6} & \frac{1+3i}{6} \end{pmatrix}$$

とおくと、これはユニタリ行列であり、U により A は

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}$$

のように対角化される。

第 8 回 (2025 年 6 月 2 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数３・第８回学習内容チェックシート 2025 年 6 月 2 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. (1) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が正規であるとはどんな条件が成り立つときをいうか？その条件を書け。

(2) 正規行列はどのような行列により対角化される行列として特徴付けられるか？

(3) 正規行列の例として、ユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列がある。このうち、エルミート行列と歪エルミート行列はどのような条件を満たす行列を指すか。

[エルミート行列] [歪エルミート行列]

Q2. T を n 次元複素ベクトル空間 V 上の $\mathbb{C}$-線形変換とし、各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$W(\lambda, T) := \{\ v \in V \mid T(v) = \lambda v\ \}$ とおく。

(1) λ が T の固有値であるとはどのような条件が満たされるときをいうか。その条件を書け。

(2) T の固有多項式 $\varDelta_T(x)$ とはどのような多項式か？定義を説明せよ。

(3) T の固有値を求めるにはどうすればよいか。有効な方法を記せ。

(4) λ が T の固有値であるとき、

(i) 固有値 λ に属する T の固有ベクトルとは何か。その条件を書け。

(ii) 固有値 λ に属する T の固有空間とは何か。定義を書け。

(iii) 固有値 λ に属する T の固有空間を求めるにはどうすればよいか？

Q3. T を有限次元複素計量空間 V 上の $\mathbb{C}$-線形変換とする。

(1) T が正規変換であるとはどんな条件が成り立つときをいうか？その条件を書け。

(2) T が正規変換であることは、正規直交基底を用いてどのように言い換えられるか。

Q4. 第８回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。