

§8. 線形写像とその行列表示

ここでは、線形写像の定義とその行列表示について復習する。以下、 $\mathbb{K}$ は体を表わす。

● 8-1 : 線形写像の定義と性質

定義 8-1-1

V, U を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。写像 $T : V \rightarrow U$ が次の2条件を満たすとき、 $\mathbb{K}$ -線形写像であると呼ばれる。

(LM1) 任意の $v, v' \in V$ に対して、 $T(v + v') = T(v) + T(v')$ 。

(LM2) 任意の $v \in V$ と任意の $t \in \mathbb{K}$ に対して、 $T(tv) = tT(v)$ 。

例 8-1-2 次の各写像は $\mathbb{K}$ -線形写像である (但し、(3) の写像については $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする)。

(1) 行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ に対して、 $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 。

(2) $T : \text{Seq}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Seq}(\mathbb{K})$, $T(\{a_n\}_{n=1}^\infty) = \{a_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ 。

(3) $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = \frac{df}{dx}$ 。

注意. (2) と (3) の線形写像は次のよう

に密接に関連している。話を簡単にするために、数列としては“第0項”から始まるもの $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ であって、十分な n に対して $a_n = 0$ を満たしているものを考える。このような数列全

体からなるベクトル空間を V とおく。このとき、各数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in V$ に対して、次のような $\mathbb{R}$ 上で定義された何回でも微分可能な関数

$$(8-1 \text{ a}) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n$$

が定まる。各数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ に対してこの関数を対応させる写像を Φ で表わすと、 $f(x)$ の導関数 $D(f(x))$ は $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ から初項 a_0 を削った数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を Φ で写したものに一致する。すなわち、右上の図式が可換である。これより、(2) の線形写像は関数の微分を「離散化」したものとみなされる。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi} & C^\infty(\mathbb{R}) \\ \downarrow T(\text{初項を削る写像}) & & \downarrow D = \frac{d}{dx} \\ V & \xrightarrow{\Phi} & C^\infty(\mathbb{R}) \end{array}$$

線形写像は次の性質を持つ。

補題 8-1-3

$\mathbb{K}$ -線形写像 $T : V \rightarrow U$ に対して

(1) $T(0_V) = 0_U$ 。

(2) 任意の $v \in V$ に対して $T(-v) = -T(v)$ 。

● 8-2 : 次元公式

$\mathbb{K}$ -線形写像 $T : V \rightarrow U$ に対して

$$(8-2 \text{ a}) \quad \text{Ker} T = \{ v \in V \mid T(v) = 0_U \},$$

$$(8-2 \text{ b}) \quad \text{Im} T = \{ T(v) \mid v \in V \}$$

をそれぞれ T の**核**、**像**と呼ぶ。 $\text{Ker} T$ は V の部分空間、 $\text{Im} T$ は U の部分空間である。

線形写像の核と像と定義域の次元の間には次の等式が成り立つ。

定理 8-2-1 (次元公式)

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、 $T: V \rightarrow U$ を $\mathbb{K}$ -線形写像とする。このとき、

$$(8-2 c) \quad \dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T).$$

(証明)

$\text{Ker } T$ の基底 “ $v_1, \dots, v_k$ ” と $\text{Im } T$ の基底 “ $u_1, \dots, u_l$ ” をとり、各 $j = 1, \dots, l$ に対して $u_j = T(v'_j)$ とおく。このとき、“ $v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_l$ ” は V の基底である。これを示す。

- 一次独立性: $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in \mathbb{K}$ に対して

$$(8-2 d) \quad c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + d_1 v'_1 + \dots + d_l v'_l = 0$$

とおく。 $T(v_i) = 0$ ($i = 1, \dots, k$) より、上式の両辺に T を作用させて、 $d_1 u_1 + \dots + d_l u_l = 0$ を得る。“ $u_1, \dots, u_l$ ” は $\mathbb{K}$ 上一次独立であるから、 $d_1 = \dots = d_l = 0$ となる。これを (8-2 d) に代入して $c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$ を得るが、“ $v_1, \dots, v_k$ ” は一次独立であるから、 $c_1 = \dots = c_k = 0$ となる。よって、“ $v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_l$ ” は $\mathbb{K}$ 上一次独立である。

- V を張ること: 任意に $v \in V$ をとる。“ $u_1, \dots, u_l$ ” は $\text{Im } T$ の基底であるから、 $T(v)$ は

$$T(v) = d_1 u_1 + \dots + d_l u_l \quad (d_1, \dots, d_l \in \mathbb{K})$$

のように表わされる。このとき、 $T(v - d_1 v'_1 - \dots - d_l v'_l) = T(v) - d_1 u_1 - \dots - d_l u_l = 0$ であるから、 $v - d_1 v'_1 - \dots - d_l v'_l \in \text{Ker } T$ となる。“ $v_1, \dots, v_k$ ” は $\text{Ker } T$ の基底であるから、

$$v - d_1 v'_1 - \dots - d_l v'_l = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \quad (c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K})$$

と書ける。よって、 v は $v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_l$ の $\mathbb{K}$ -一次結合で表わされる。

以上より、“ $v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_l$ ” は V の基底をなし、したがって、(8-2 c) が成立する。 $\square$

● 8-3 : 線形変換の行列表示

写像を定義するには、定義域に属するすべての元について行き先を決める必要があるが、線形写像は基底の行き先を決めれば、その他の行き先が自動的に決まる。実際、 $T: V \rightarrow U$ を $\mathbb{K}$ -線形写像とする。 $\dim V = n$ とし、 $\mathcal{B} = “v_1, \dots, v_n”$ を V の基底とすると、任意のベクトル $v \in V$ は次のように表わされる:

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}).$$

それゆえ、 T による v の像は次のように $T(v_1), \dots, T(v_n)$ の一次結合で表わされる:

$$(8-3 a) \quad T(v) = T(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \dots + t_n T(v_n).$$

U も有限次元であるとき、 $\mathcal{B}' = “u_1, \dots, u_m”$ を U の基底とすると、各 $T(v_j)$ はその基底の一次結合により一意的に表わされる:

$$(8-3 b) \quad T(v_j) = a_{1j} u_1 + \dots + a_{mj} u_m \quad (a_{ij} \in \mathbb{K}).$$

ここに現れる係数を順に取り出して、縦に並べることによって (m, n) -行列 A が得られる:

$$\begin{array}{l} T(v_1) = \textcircled{a_{11}} u_1 + \textcircled{a_{21}} u_2 + \dots + \textcircled{a_{m1}} u_m \\ T(v_2) = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m \end{array} \quad A = \left(\begin{array}{c|c|c} \textcircled{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \textcircled{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \textcircled{a_{m1}} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

この行列 A を基底 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ に関する T の**行列表示**と呼ぶ。 A は

$$(8-3 \text{ c}) \quad (T(v_1) \cdots T(v_n)) = (u_1 \cdots u_m)A$$

を満たす (m, n) -行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ に他ならない。

この授業ではもっぱら、 $U = V$ の場合の線形写像を扱う。このような線形写像は V 上の**線形変換**と呼ばれる。通常、線形変換に対しては、定義域の V と終域の V の基底を同じ基底 $\mathcal{B}$ に選んだ行列表示を考える。この行列表示を、単に V の基底 $\mathcal{B}$ に関する T の**行列表示**と呼ぶ。

基底の取り換えにより、線形変換の行列表示は次のような変化を受ける。

定理 8-3-1

$V (\neq \{0\})$ を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とし、 $T: V \rightarrow V$ を $\mathbb{K}$ -線形変換とする。 V の基底 $\mathcal{B}$ に関する T の行列表示を A とし、基底 $\mathcal{B}'$ に関する T の行列表示を B とする。このとき、

$$P^{-1}AP = B$$

となる正則行列 $P \in M_n(\mathbb{K}) (= M_{nn}(\mathbb{K}))$ が存在する。

● 8-4 : 抽象と具体の間の「翻訳装置」の役割としての基底

抽象的な世界 (ベクトル空間と線形写像の世界) と具体的な世界 (行列と基本変形の世界) が基底を仲介としてつながる。

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、“ $v_1, \dots, v_n$ ” を V の基底とする。このとき、

$$(8-4 \text{ a}) \quad \Phi(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K})$$

によって定義される写像 $\Phi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ は線形同型写像、すなわち、全単射な線形写像である。 Φ を基底 “ $v_1, \dots, v_n$ ” に関する V の**座標系**と呼ぶ。

$T: V \rightarrow V$ を V 上の線形変換とし、基底 “ $v_1, \dots, v_n$ ” に関する T の行列表示を A とおくと、次の等式が成り立つ、すなわち、右の図式が可換である。

$$(8-4 \text{ b}) \quad \Phi \circ T \circ \Phi^{-1} = T_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{K}^n \\ T \downarrow & & \downarrow T_A \\ V & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

定理 8-4-1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、 $T: V \rightarrow V$ を $\mathbb{K}$ -線形変換とする。 V の基底 “ $v_1, \dots, v_n$ ” に関する T の行列表示を A とし、 $\Phi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ を基底 “ $v_1, \dots, v_n$ ” に関する V の座標系とする。このとき、

$$(8-4 \text{ c}) \quad \Phi(\text{Im } T) = \text{Im } T_A, \quad \Phi(\text{Ker } T) = \text{Ker } T_A$$

が成り立つ。特に、

$$(8-4 \text{ d}) \quad \dim(\text{Im } T) = \text{rank } A, \quad \dim(\text{Ker } T) = \dim V - \text{rank } A.$$

(証明)

- $\Phi(\text{Im } T) = \text{Im } T_A$ であること：これは次のようにして示される。

$$\Phi(\text{Im } T) = \{ \Phi(T(v)) \mid v \in V \} = \{ (T_A \circ \Phi)(v) \mid v \in V \} = \{ T_A(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \} = \text{Im } T_A.$$

- $\Phi(\text{Ker } T) = \text{Ker } T_A$ であること： $v \in \text{Ker } T$ ならば

$$(T_A \circ \Phi)(v) = (\Phi \circ T)(v) = \Phi(0_V) = 0_V$$

となるから、 $\Phi(v) \in \text{Ker } T_A$ である。つまり、 $\Phi(\text{Ker } T) \subset \text{Ker } T_A$ となる。

逆に、 $\mathbf{x} \in \text{Ker } T_A$ ならば、 $v = \Phi^{-1}(\mathbf{x}) \in V$ に対して

$$T(v) = (T \circ \Phi^{-1})(\mathbf{x}) = (\Phi^{-1} \circ T_A)(\mathbf{x}) = \Phi^{-1}(\mathbf{0}) = 0_V$$

となる。よって、 $v \in \text{Ker } T$ であり、 $\mathbf{x} = \Phi(v) \in \Phi(\text{Ker } T)$ となる。これで、 $\text{Ker } T_A \subset \Phi(\text{Ker } T)$ も示された。こうして、 $\Phi(\text{Ker } T) = \text{Ker } T_A$ が示された。

• $\dim(\text{Im } T) = \text{rank } A$ であること： Φ は線形同型写像なので基底を基底に写し、したがって次元を保つから、 $\dim(\text{Im } T) = \dim(\Phi(\text{Im } T)) = \dim(\text{Im } T_A)$ である。 $\text{Im } T_A$ は A の列ベクトルによって張られる空間だから、

$$(8-4 \text{ e}) \quad \dim(\text{Im } T_A) = \text{rank } A$$

が成り立つ。これより、等式 $\dim(\text{Im } T) = \text{rank } A$ を得る。

• $\dim(\text{Ker } T) = \dim V - \text{rank } A$ であること：同様に、 $\dim(\text{Ker } T) = \dim(\Phi(\text{Ker } T)) = \dim(\text{Ker } T_A)$ を得る。線形写像 T_A に次元公式 ([定理 8-2-1]) を適用し、(8-4 e) を用いると

$$(8-4 \text{ f}) \quad \dim(\text{Ker } T_A) = n - \text{rank } A$$

がわかる。よって、等式 $\dim(\text{Ker } T) = n - \text{rank } A = \dim V - \text{rank } A$ が成り立つ。□

例 8-4-2 次数が 3 以下の実数係数多項式全体のなすベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_3$ を考える。写像 $T: V \rightarrow V$ を

$$T(f(x)) = f(x) - (x-1)f'(x) \quad (f(x) \in V)$$

によって定義する。 T は V 上の線形変換である。 $\text{Ker } T$ および $\text{Im } T$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよう。 V の基底として “ $1, x, x^2, x^3$ ” をとる。この基底に関する T の行列表示は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

である。 A から定まる線形写像 $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ について

$$\text{Ker } T_A = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{Im } T_A = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

となることがわかる。よって、 $\text{Ker } T_A$ の基底として “ $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ” を取ることができ、 $\text{Im } T_A$ の

基底として “ $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ” を取ることができる。 Φ を “ $1, x, x^2, x^3$ ”

に関する V の座標系とすると、

$$\Phi^{-1}(\mathbf{u}) = -1 + x, \quad \Phi^{-1}(\mathbf{v}_1) = 1, \quad \Phi^{-1}(\mathbf{v}_2) = -2x + x^2, \quad \Phi^{-1}(\mathbf{v}_3) = 3x^2 - 2x^3$$

となるから、 $\text{Ker } T$ の基底として “ $-1 + x$ ” が見つかり、また、 $\text{Im } T$ の基底として “ $1, -2x + x^2, 3x^2 - 2x^3$ ” が見つかる。□

線形代数 4 事前練習用演習問題

pre8-1. 高々 3 次の実数係数の多項式全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ 上で、

$$T(f(x)) = f(x+1) - (x+1)f'(x)$$

によって定義される線形変換 T を考える。ここで、 $f'(x)$ は $f(x)$ を x について微分することにより得られる多項式を表わす。

(1) $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\mathcal{B}_1 = "1, x, x^2, x^3"$ に関する行列表示 A と $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\mathcal{B}_2 = "1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3"$ に関する T の行列表示 B を求めよ。

(2) (1) で求めた行列 A と B はどのような関係にあるのかを述べよ。

(3) $\text{Ker } T$ および $\text{Im } T$ の基底を一組ずつ求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre8-1.

$$(1) \quad T(1) = 1 - (x+1) \cdot 0 = 1,$$

$$T(x) = (x+1) - (x+1) \cdot 1 = 0,$$

$$T(x^2) = (x+1)^2 - (x+1) \cdot (2x) = 1 - x^2,$$

$$T(x^3) = (x+1)^3 - (x+1) \cdot (3x^2) = 1 + 3x - 2x^3$$

より、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

同様に、 $T(1), T(x+1), T((x+1)^2), T((x+1)^3)$ を計算して、“ $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$ ” の一次結合で表わし、それらの係数を順に縦にならべることにより、行列表示

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) 基底 $\mathcal{B}_2$ から $\mathcal{B}_1$ への基底の変換行列を P とおくと、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき、 $B = P^{-1}AP$ が成り立つ。

(3) A から定まる線形変換 $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を考える。行基本変形により、 A は階段行列

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に変形される。よって、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解を求めて、

$$\text{Ker } T_A = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

であることがわかる。したがって、 $\text{Ker } T_A$ の基底として “ $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ” を選ぶことができる。こ

れを $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\mathcal{B}_1$ に関する座標系 $\Phi: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ により $\mathbb{R}[x]_3$ に戻して、 $\text{Ker } T$ の基底 “ x ” が見つかる。

一方、 A' において「段」が下がる列番号 1, 3, 4 と同じ列番号の列ベクトルを A から選ぶことにより、

$$\text{Im } T_A = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

であることがわかる。 $\dim(\text{Im } T_A) = \text{rank } A = 3$ であるから、“ $\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ”, $\mathbf{a}_3 :=$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ” は $\text{Im } T_A$ の基底であることがわかる。これを $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\mathcal{B}_1$ に

関する座標系 Φ により $\mathbb{R}[x]_3$ に戻して、 $\text{Im } T$ の基底 “ $1, 1 - x^2, 1 + 3x - 2x^3$ ” が見つかる。

線形代数4・第8回(2025年11月17日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. V, U を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、 $T: V \rightarrow U$ を写像とする。(1) T が $\mathbb{K}$ -線形写像であるとはどのような条件を満たすときをいうか。その2条件を書け。

(LM1) _____

(LM2) _____

(2) T が $\mathbb{K}$ -線形写像であるとき、核 $\text{Ker} T$ と像 $\text{Im} T$ はそれぞれどのように定義されるか。 $\text{Ker} T =$ _____, $\text{Im} T =$ _____(3) V が有限次元で、 T が $\mathbb{K}$ -線形写像であるとき、次元公式とはどのような等式か。(4) 行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ から定まる $\mathbb{K}$ -線形写像 T_A はどのように定義される写像か？Q2. V, U を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間、 $T: V \rightarrow U$ を $\mathbb{K}$ -線形写像とする。 $\dim V = 3$, $\dim U = 2$ とし、 $\mathcal{B} = "v_1, v_2, v_3"$, $\mathcal{B}' = "u_1, u_2"$ をそれぞれ V, U の基底とする。基底 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ に関する T の行列表示 A の求め方を説明せよ。Q3. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。(1) V 上の $\mathbb{K}$ -線形変換とは何か。その定義を書け。(2) $\dim V = n$ とし、 V に2つの基底 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ が与えられたとする。 V 上の $\mathbb{K}$ -線形変換 T の $\mathcal{B}$ に関する行列表示を A とし、 $\mathcal{B}'$ に関する行列表示を B とするとき、 A と B の間にはどのような関係が成り立つか？Q4. V を n 次元 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし、 $\mathcal{B} = "v_1, \dots, v_n"$ を V の基底とする。基底 $\mathcal{B}$ に関する V の座標系を Φ とおく。(1) Φ はどのように定義される写像か？(2) T を V 上の $\mathbb{K}$ -線形変換とし、基底 $\mathcal{B}$ に関する行列表示を A とおく。(i) Φ, T, T_A の間に成立する関係式を書け。 _____(ii) $\text{Im} T$ と $\text{Im} T_A$, $\text{Ker} T$ と $\text{Ker} T_A$ はそれぞれ Φ を介してどのように結ばれるか？

[Im について] _____ [Ker について] _____

Q5. 第8回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。