

§8.2 変数関数の Taylor 展開

ある条件を満たす2変数関数は x と y に関する多項式によって近似することができる。その多項式の係数は、高階の偏微分係数によって与えられる。ここでは、これらの結果—2変数関数の Taylor 展開、Maclaurin 展開—を導く。

● 8-1：高階偏導関数

領域 D 上で定義された偏微分可能な関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ がさらに偏微分可能であるとき、その偏導関数として次の4つが考えられる。

$$(8-1 \text{ a}) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

これらを $f(x, y)$ の第2次偏導関数または2階偏導関数と呼ぶ。

より一般に、 $f(x, y)$ を n 回続けて偏微分することができるとき、 $f(x, y)$ は n 回偏微分可能であるという。その偏導関数は一般に次の形をしている：

$$(8-1 \text{ b}) \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\cdots \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdots \right) \right)$$

但し、 $i = 1, \dots, n$ に対して $x_i = x$ または $x_i = y$ である。

(8-1 b) を $f(x, y)$ の第 n 次偏導関数または n 階偏導関数と呼ぶ。

● 8-2：偏微分の順序交換

一般に、領域 D 上で定義された2回偏微分可能な関数 $f(x, y)$ に対して、偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は等しいとは限らない(教科書 p.96 問4 参照)。しかし、

$$(8-2 \text{ a}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ と } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ がともに連続であれば } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ となる}$$

ことが知られている。この事実を繰り返し使うことにより次がわかる。

定理 8-2-1

$n \geq 0$ を整数とし、 $f(x, y)$ を領域 D 上で定義された n 回偏微分可能な関数であって、 n 階までのすべての偏導関数が連続であるとする。このとき、 n 階までの偏導関数は偏微分の順序によらない。したがって、 $p+q \leq n$ なる整数 $p, q \geq 0$ に対して、 f を x について p 回、 y について q 回偏微分して得られる偏導関数は、次のように書くことができる：

$$(8-2 \text{ b}) \quad \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}.$$

例 8-2-2 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ は何回でも微分可能、すなわち、任意の整数 $n \geq 1$ に対して n 階の偏導関数はすべて微分可能である。したがって、 n 階の偏導関数はすべて連続になり、それは偏微分の順序によらない。例えば、

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$$

が成り立つ。この関数は $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ より次で与えられる。

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{-4y(-3x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

● 8-3 : Taylor 展開

$f(x, y)$ を領域 D 上で定義された偏微分可能な関数とする。 $h, k \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(8-3 \text{ a}) \quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$$

と定める。さらに、 $f(x, y)$ が 2 回偏微分可能なときには、

$$(8-3 \text{ b}) \quad \begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f &:= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + kh \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

と定める。一般に、 $f(x, y)$ が n 回偏微分可能なときには、

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f, \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f, \dots, \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f$$

が定義される。

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ が連続なときには、両者は等しいから

$$(8-3 \text{ c}) \quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

となり、3 階までの偏導関数がすべて連続なときには

$$(8-3 \text{ d}) \quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f = h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

となる。

定理 8-3-1

$n \geq 0$ を整数とし、 $f(x, y)$ を領域 D 上で定義された n 回偏微分可能な関数であって、 n 階までのすべての偏導関数が連続であるとする。 $(a, b) \in D$ とする。実数 h, k が (a, b) と $(a + h, b + k)$ を結ぶ線分が D の中に含まれるくらいに十分小さいならば、次の等式を満たす実数 θ ($0 < \theta < 1$) が存在する：

$$(8-3 \text{ e}) \quad \begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \right](a, b) + \frac{1}{2!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \right](a, b) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f \right](a, b) + R_n, \\ R_n &= \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right](a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

(証明)

D は開集合であり、 (a, b) と $(a + h, b + k)$ を結ぶ線分は D の中に含まれているので、 $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると、

$$-\varepsilon < t < 1 + \varepsilon \implies (a + ht, b + kt) \in D$$

が成り立つ。したがって、開区間 $I = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ 上で定義された関数

$$(8-3 f) \quad F(t) = f(a + ht, b + kt) \quad (t \in I)$$

を考えることができる。 $F(t)$ は n 回微分可能であり、その第 n 次 Maclaurin 展開は

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F^{(2)}(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。特に、 $t = 1$ を代入して

$$(8-3 g) \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F^{(2)}(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} \quad (0 < \theta < 1)$$

を得る。ここで、 $F(1) = f(a + h, b + k)$, $F(0) = f(a, b)$ であるから、 $i = 1, \dots, n$ に対して

$$(8-3 h) \quad F^{(i)}(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(a + ht, b + kt)$$

が示されれば、(8-3 g) は示したい式そのものであることがわかる。

まず、連鎖定理 [定理 7-2-2] より、

$$(8-3 i) \quad \begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt) \cdot k \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

と書ける。よって、 $i = 1$ のとき (8-3 h) は成立する。

次に、 $i = 2$ のときを考える。

$$g(x, y) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y)$$

とおくと、(8-3 i) は

$$F'(t) = g(a + ht, b + kt)$$

と表わすことができる。したがって、(8-3 f) から (8-3 i) を導いた方法と同様にして、

$$F''(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) g(a + ht, b + kt) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a + ht, b + kt)$$

がわかる。よって、 $i = 2$ のときも (8-3 h) は成立する。以下同様にして、一般の i に対して (8-3 h) は成立することがわかる。 $\square$

定理の式 (8-3 e) において、 $x = a + h$, $y = b + k$ とおくことにより、 $f(x, y)$ は (a, b) の十分近くでは、

$$(x - a, y - b \text{ に関する } n - 1 \text{ 次多項式}) + (\text{“余り”の項})$$

の形をしていることがわかる。この表示を $f(x, y)$ の (a, b) のまわりでの第 n 次 Taylor 展開といい、 $(a, b) = (0, 0)$ の場合を特別に第 n 次 Maclaurin 展開と呼ぶ。また、 R_n をラグランジュの剰余項と呼ぶ。

例 8-3-2

(1) $n = 2$ のとき、(8-3 e) より、 $f(x, y)$ の (a, b) のまわりでの第 2 次 Taylor 展開は

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + R_2$$

で与えられる。但し、 R_2 はラグランジュの剰余項である。

(2) $n = 3$ のとき、(8-3 e) より、 $f(x, y)$ の (a, b) のまわりでの第 3 次 Taylor 展開は

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ & + \frac{1}{2} \left((x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) + R_3 \end{aligned}$$

で与えられる。但し、 R_3 はラグランジュの剰余項である。

例 8-3-3 関数 $f(x, y) = \log(2x + y)$ ($2x + y > 0$) について、 $(1, 0)$ のまわりでの第 2 次 Taylor 展開を求めよ。

解：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2}{2x + y}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2x + y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-4}{(2x + y)^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-2}{(2x + y)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-1}{(2x + y)^2} \end{aligned}$$

であるから、関数 $f(x, y)$ の $(1, 0)$ のまわりでの第 2 次 Taylor 展開は

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 0) + (x - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) + R_2 \\ &= \log 2 + (x - 1) + \frac{1}{2}y + R_2 \end{aligned}$$

である。但し、

$$R_2 = \frac{1}{(2 + 2\theta(x - 1) + \theta y)^2} \left(-2(x - 1)^2 - 2(x - 1)y - \frac{1}{2}y^2 \right) \quad (0 < \theta < 1)$$

である。 □

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 8 回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 次の に適当な言葉や数式・記号を入れなさい。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ が 2 回偏微分可能であるとする、 $f(x, y)$ の が $f(x, y)$ の偏導関数をさらに偏微分することによって定義される。
より正確には、それらは次式で定義される：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{, } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \text{$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \text{, } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \text{$$

この 4 つのうち、 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ については、それらが であれば、 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ となる。

- $(0, 0)$ を含む領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ の第 2 次 Maclaurin 展開は、 R_2 をラグランジュの剰余項として、

$$f(x, y) = \text{} + \text{} x + \text{} y + R_2$$

である。

- $(0, 0)$ を含む領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ の第 3 次 Maclaurin 展開は、第 2 次偏導関数が連続なとき、 R_3 をラグランジュの剰余項として、

$$f(x, y) = \text{} + \text{} x + \text{} y \\ + \text{} x^2 + \text{} xy + \text{} y^2 + R_3$$

である。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ を $(a, b) \in D$ のまわりで第 2 次 Taylor 展開すると、 R_2 をラグランジュの剰余項として、

$$f(x, y) = \text{} + \text{} (x - a) + \text{} (y - b) + R_2$$

となる。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ は 4 回偏微分可能であって、4 階までの偏導関数がすべて連続であるとする。このとき、実数 h, k に対して、 $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^4 f$ は $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ を用いて次のように表わされる：

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f = \text{$$

Q2. 第 8 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。