§8. 2 変数関数の Taylor 展開

ある条件を満たす２変数関数は x と y に関する多項式によって近似することができる。その多項式の係数は、高階の偏微分係数によって与えられる。ここでは、これらの結果—２変数関数の Taylor 展開、Maclaurin 展開—を導く。

● 8 - 1 : 高階偏導関数

領域 D 上で定義された偏微分可能な関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ がさらに偏微分可能であるとき、その偏導関数として次の４つが考えられる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \tag{8-1 a}$$

これらを $f(x,y)$ の**第 2 次偏導関数**または **2 階偏導関数**と呼ぶ。

より一般に、$f(x,y)$ を n 回続けて偏微分することができるとき、$f(x,y)$ は n **回偏微分可能**であるという。その偏導関数は一般に次の形をしている：

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\cdots \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)\cdots\Big)\Big) \tag{8-1 b}$$

但し、$i = 1, \cdots, n$ に対して $x_i = x$ または $x_i = y$ である。

(8 - 1 b) を $f(x,y)$ の**第 n 次偏導関数**または n **階偏導関数**と呼ぶ。

● 8 - 2 : 偏微分の順序交換

一般に、領域 D 上で定義された 2 回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して、偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は等しいとは限らない (教科書 p.96 問４参照)。しかし、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ と } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ がともに連続であれば } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ となる} \tag{8-2 a}$$

ことが知られている。この事実を繰り返し使うことにより次がわかる。

定理 8 - 2 - 1

$n \geq 0$ を整数とし、$f(x,y)$ を領域 D 上で定義された n 回偏微分可能な関数であって、n 階までのすべての偏導関数が連続であるとする。このとき、n 階までの偏導関数は偏微分の順序によらない。したがって、$p+q \leq n$ なる整数 $p, q \geq 0$ に対して、f を x について p 回、y について q 回偏微分して得られる偏導関数は、次のように書くことができる：

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}. \tag{8-2 b}$$

例 8 - 2 - 2 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1)$ は何回でも微分可能、すなわち、任意の整数 $n \geq 1$ に対して n 階の偏導関数はすべて微分可能である。したがって、n 階の偏導関数はすべて連続になり、それは偏微分の順序によらない。例えば、

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$$

が成り立つ。この関数は $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$ より次で与えられる。

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{-4y(-3x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3}.$$

● 8 - 3 : Taylor 展開

$f(x,y)$ を領域 D 上で定義された偏微分可能な関数とする。$h,k\in\mathbb{R}$ に対して、

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)f=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8 - 3 a}$$

と定める。さらに、$f(x,y)$ が 2 回偏微分可能なときには、

$$\begin{aligned}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f &:= \Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{aligned} \tag{8 - 3 b}$$

と定める。一般に、$f(x,y)$ が n 回偏微分可能なときには、

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)f,\ \Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f,\ \cdots,\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f$$

が定義される。

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ が連続なときには、両者は等しいから

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{8 - 3 c}$$

となり、3 階までの偏導関数がすべて連続なときには

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^3 f=h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \tag{8 - 3 d}$$

となる。

定理 8 - 3 - 1

$n\geq 0$ を整数とし、$f(x,y)$ を領域 D 上で定義された n 回偏微分可能な関数であって、n 階までのすべての偏導関数が連続であるとする。$(a,b)\in D$ とする。実数 h,k が (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D の中に含まれるくらいに十分小さいならば、次の等式を満たす実数 θ $(0<\theta<1)$ が存在する：

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=f(a,b)&+\Big[\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)f\Big](a,b)+\frac{1}{2!}\Big[\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f\Big](a,b)\\ &+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\Big[\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{n-1} f\Big](a,b)+R_n,\end{aligned} \tag{8 - 3 e}$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\Big[\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f\Big](a+\theta h,b+\theta k)$$

(**証明**)

D は開集合であり、(a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分は D の中に含まれているので、$\varepsilon>0$ を十分小さくとると、

$$-\varepsilon<t<1+\varepsilon \implies (a+ht,b+kt)\in D$$

が成り立つ。したがって、開区間 $I=(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ 上で定義された関数

$$F(t)=f(a+ht,b+kt)\qquad(t\in I)\tag{8-3 f}$$

を考えることができる。$F(t)$ は n 回微分可能であり、その第 n 次 Maclaurin 展開は

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F^{(2)}(0)}{2}t^2+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n\quad(0<\theta<1)$$

となる。特に、$t=1$ を代入して

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F^{(2)}(0)}{2}+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}\quad(0<\theta<1)\tag{8-3 g}$$

を得る。ここで、$F(1)=f(a+h,b+k),\ F(0)=f(a,b)$ であるから、$i=1,\cdots,n$ に対して

$$F^{(i)}(t)=\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^i f(a+ht,b+kt)\tag{8-3 h}$$

が示されれば、(8-3 g) は示したい式そのものであることがわかる。

まず、連鎖定理 [定理 7-2-2] より、

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{\partial f}{\partial x}(a+ht,b+kt)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(a+ht,b+kt)\cdot k\\&=\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)f(a+ht,b+kt)\end{aligned}\tag{8-3 i}$$

と書ける。よって、$i=1$ のとき (8-3 h) は成立する。

次に、$i=2$ のときを考える。

$$g(x,y)=\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)f(x,y)$$

とおくと、(8-3 i) は

$$F'(t)=g(a+ht,b+kt)$$

と表わすことができる。したがって、(8-3 f) から (8-3 i) を導いた方法と同様にして、

$$F''(t)=\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)g(a+ht,b+kt)=\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(a+ht,b+kt)$$

がわかる。よって、$i=2$ のときも (8-3 h) は成立する。以下同様にして、一般の i に対して (8-3 h) は成立することがわかる。 □

定理の式 (8-3 e) において、$x=a+h,\ y=b+k$ とおくことにより、$f(x,y)$ は (a,b) の十分近くでは、

$$(x-a,\ y-b\text{ に関する }n-1\text{ 次多項式})+(\text{“余り”の項})$$

の形をしていることがわかる。この表示を $f(x,y)$ の (a,b) のまわりでの**第 n 次 Taylor 展開**といい、$(a,b)=(0,0)$ の場合を特別に**第 n 次 Maclaurin 展開**と呼ぶ。また、R_n を**ラグランジュの剰余項**と呼ぶ。

例 8 - 3 - 2

(1) $n=2$ のとき、(8 - 3 e) より、$f(x,y)$ の (a,b) のまわりでの第 2 次 Taylor 展開は

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+R_2$$

で与えられる。但し、R_2 はラグランジュの剰余項である。

(2) $n=3$ のとき、(8 - 3 e) より、$f(x,y)$ の (a,b) のまわりでの第 3 次 Taylor 展開は

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\\&\quad+\frac{1}{2}\Big((x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\Big)+R_3\end{aligned}$$

で与えられる。但し、R_3 はラグランジュの剰余項である。

例 8 - 3 - 3 関数 $f(x,y)=\log(2x+y)$ $(2x+y>0)$ について、$(1,0)$ のまわりでの第 2 次 Taylor 展開を求めよ。

解；

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{2x+y},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2x+y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-4}{(2x+y)^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-2}{(2x+y)^2}\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-1}{(2x+y)^2}$$

であるから、関数 $f(x,y)$ の $(1,0)$ のまわりでの第 2 次 Taylor 展開は

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(1,0)+(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)+R_2\\&=\log 2+(x-1)+\frac{1}{2}y+R_2\end{aligned}$$

である。但し、

$$R_2=\frac{1}{(2+2\theta(x-1)+\theta y)^2}\Big(-2(x-1)^2-2(x-1)y-\frac{1}{2}y^2\Big)\qquad(0<\theta<1)$$

である。 □

2026 年 11 月 12 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第８回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を入れなさい。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が 2 回偏微分可能であるとすると、$f(x,y)$ の $\boxed{}$ が $f(x,y)$ の偏導関数をさらに偏微分することによって定義される。より正確には、それらは次式で定義される：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \boxed{}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \boxed{}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{}$$

この４つのうち、$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ については、それらが $\boxed{}$ であれば、$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ となる。

- $(0,0)$ を含む領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ の第 2 次 Maclaurin 展開は、R_2 をラグランジュの剰余項として、

$$f(x,y) = \boxed{} + \boxed{}\, x + \boxed{}\, y + R_2$$

である。

- $(0,0)$ を含む領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ の第 3 次 Maclaurin 展開は、第 2 次偏導関数が連続なとき、R_3 をラグランジュの剰余項として、

$$f(x,y) = \boxed{} + \boxed{}\, x + \boxed{}\, y + \boxed{}\, x^2 + \boxed{}\, xy + \boxed{}\, y^2 + R_3$$

である。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ を $(a,b) \in D$ のまわりで第 2 次 Taylor 展開すると、R_2 をラグランジュの剰余項として、

$$f(x,y) = \boxed{} + \boxed{}\,(x-a) + \boxed{}\,(y-b) + R_2$$

となる。

- 領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ は 4 回偏微分可能であって、4 階までの偏導関数がすべて連続であるとする。このとき、実数 h,k に対して、$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f$ は $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ を用いて次のように表わされる：

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f = \boxed{}$$

Q2. 第８回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。