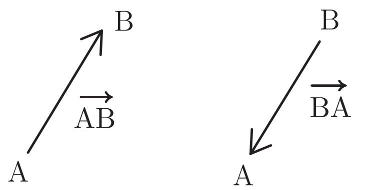
§9. 幾何ベクトルから数ベクトルへ

この節では、高校で学んだベクトルの概念—幾何学的側面から見たベクトルの考え方—を振り返る。線形代数の授業では、ベクトルを代数的で形式的な側面から扱うことになるが、その背景には、これから述べるような幾何学的な考え方が潜んでいる。

● 9-1： 有向線分

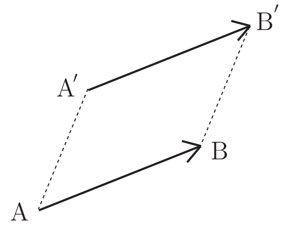
平面や空間内に異なる２点 A, B が与えられると、その２点を端点とする線分 AB が定まる。この線分に向きを指定したものを**有向線分**という。線分の向きは線分に矢印をつけて表わす。

線分 AB の向きには、A から B へ向かう向きと B から A へ向かう向きの２種類がある。A から B へ向かう向きのついた有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表わし、A, B をそれぞれその有向線分の**始点**、**終点**という。同様に、B から A へ向かう向きのついた有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ で表わし、B, A をそれぞれその有向線分の始点、終点という。



● 9-2： ベクトルとは

速度、加速度、力などの「大きさ」と「向き」の両方を持つ物理量は、大きさを線分の長さで表わし、向きを線分の向きで表わすと便利である。この目的のために有向線分を用いるとき、表わした有向線分が平面や空間のどの場所に位置しているか、ということを問う必要はない。そこで、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ に、平行移動によって、向きも含めて重ねられるとき、２つの有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ は「同じ量」を表わしていると考え、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ と書くことにしよう。このように扱われる、「長さと向きだけに注目した有向線分」を (幾何) **ベクトル**と呼ぶ。



１つのベクトルを表わす有向線分は無数にあるが、始点を指定すれば、ただ１つに定まる。

高校ではベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ のように矢印をつけて表わすが、大学では矢印をつけずに太字 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ で表わすことが多い。この表記法は、ベクトルを数の拡張として捉える、代数的立場に基づいている。この授業でも、ベクトルを後者の記法で表わすことにする。

● 9-3： 零ベクトル

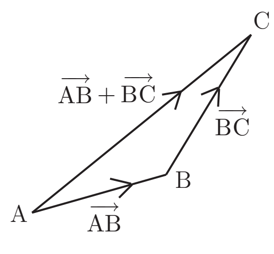
有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ においては、始点 A と終点 B は異なると仮定している。点 B を点 A に近づけていくと、線分 AB の長さはどんどん小さくなり、B が A に一致すると、ついには１点 A だけになってしまう。このような考察から、A = B のときには、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は１点 A を表わしていると解釈することができる。今後は、単に有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と呼べば、A = B の場合も含んでいるものと約束する。

有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は、大きさが 0 で向きを持たないベクトル、すなわち、**零ベクトル**を表わしていると考えられる。零ベクトルを $\mathbf{0}$ という記号で表わす。

● 9-4： ベクトルの和

有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に対して、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で表わし、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ との和と呼ぶ：

(9-4 a) $$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$



次に、２つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ を定義しよう。ベクトル $\mathbf{a}$ を有向線分で表わし、ベクトル $\mathbf{b}$ をその有向線分の終点を始点とする有向線分で表わす。例えば、

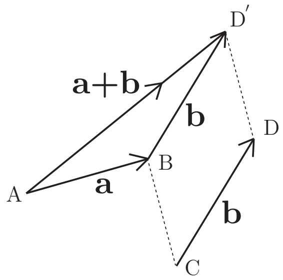
$$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \qquad \mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

とする。このとき、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ によって定まるベクトルを $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**和**といい、$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ で表わす：

(9-4 b) $$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (\text{有向線分 } \overrightarrow{\mathrm{AC}} \text{ によって定まるベクトル}).$$

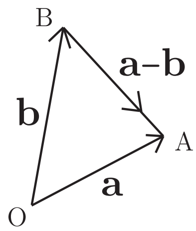
ベクトル $\mathbf{a}$ を別の有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ で表わし、$\mathbf{b}$ を有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ で表わすと、(9-4 b) の右辺は、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ によって表わされるベクトルとなるが、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は、平行移動によって、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ に重ねられるから、ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ となっている。したがって、上のように定めたベクトルの和は、それを表わす有向線分の選び方によらずに定まっている。

<u>**例 9-4-1**</u> 次図の有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ によって表わされるベクトル $\mathbf{a}$ と、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ によって表わされるベクトル $\mathbf{b}$ に対して、和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ は有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AD'}}$ によって表わされるベクトルである。



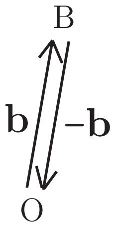
□

● 9-5：ベクトルの差



ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して、$\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{a}$ を満たすベクトル $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ を引いた**差**といい、$\mathbf{a}-\mathbf{b}$ で表わす。

ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を同じ始点の有向線分で表わすとき、例えば、$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき、差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ は有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ によって表わされる。



特に、$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (零ベクトル) のとき、差 $\mathbf{0}-\mathbf{b}$ を、単に、$-\mathbf{b}$ で表わす。ベクトル $-\mathbf{b}$ は、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ によって表わされるベクトルである。したがって、ベクトルとしての等式

(9-5 a) $$\overrightarrow{\mathrm{BO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

が成立する。

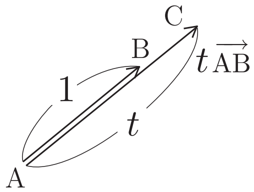
● 9-6：ベクトルの実数倍

有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と実数 t に対して、点 C を t の符号に応じて以下のように定める。

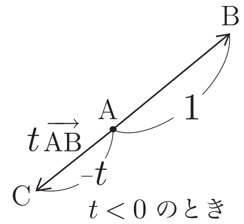
- $t > 0$ のとき：A から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の向きに延ばした半直線上に、点 C を、線分の長さの比が $\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : t$ となるようにとる。
- $t = 0$ のとき：C = A にとる。
- $t < 0$ のとき：A から $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の向きに延ばした半直線上に、点 C を、線分の長さの比が $\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : -t$ となるようにとる。

このとき、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表わす：

(9-6 a) $$t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$



$t > 0$ のとき



$t < 0$ のとき

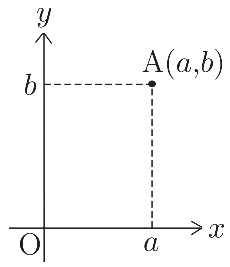
次に、ベクトル $\mathbf{a}$ と実数 t に対して**スカラー倍** $t\mathbf{a}$ を、$\mathbf{a}$ を表わす有向線分の t 倍が定めるベクトルとして定義する。例えば、$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ としたとき、

(9-6 b) $$t\mathbf{a} = (\text{有向線分 } t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ によって定まるベクトル}).$$

ベクトル $\mathbf{a}$ を別の有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ で表わすと、(9-6 b) の右辺は有向線分 $t\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ によって定まるベクトルとなるが、有向線分 $t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は有向線分 $t\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ に、平行移動によって重ねられるから、ベクトルとして $t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ となっている。したがって、上のように定めたベクトルのスカラー倍は、それを表わす有向線分の選び方によらずに定まっている。

● 9-7：ベクトルの成分表示

平面に、O を原点とする直交座標系が定められているとしよう。このとき、この平面上の任意の点 A は 2 つの実数の組 (a_1, a_2) によりただ一通りに表わされる。(a_1, a_2) を点 A の**座標**という。A が (a_1, a_2) を座標に持つ点であることを $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ のように表わす。



平面上の点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ を始点とし、点 $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ を終点とする有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と、点 $\mathrm{A'}(a'_1, a'_2)$ を始点とし、点 $\mathrm{B'}(b'_1, b'_2)$ を終点とする有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ に対して、

(9-7 a) $$\text{ベクトルとして } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \iff \begin{cases} b_1 - a_1 = b'_1 - a'_1 \\ b_2 - a_2 = b'_2 - a'_2 \end{cases}$$

が成立する。したがって、ベクトル $\mathbf{p}$ に対して、$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をとり、A, B の座標をそれぞれ (a_1, a_2), (b_1, b_2) として、実数の組 $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ を作ると、これは $\mathbf{p}$ を表わす有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の選び方によらずに定まる。そこで、ベクトル $\mathbf{p}$ を

(9-7 b) $$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

のように表わし、これをベクトル $\mathbf{p}$ の、(与えられた直交座標系に関する) 成分表示と呼ぶ。

例 9-7-1 O を原点とする平面の直交座標系において、2 点 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(-3, 1)$ を考える。このとき、有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ によって定まるベクトル $\mathbf{p}$ を成分で表わすと、$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。 □

● 9-8：位置ベクトル

O を原点とする平面の直交座標系において、点 $\mathrm{P}(p_1, p_2)$ を任意にとる。このとき、O を始点とし、P を終点とする有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が定まる。この有向線分によって定まるベクトルを、点

P の**位置ベクトル**という。$\mathbf{p}$ をその位置ベクトルとすれば、ベクトル $\mathbf{p}$ の成分表示は

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

となり、P の座標に一致する。

定理 9 - 8 - 1

ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ の、O を原点とする平面の直交座標系における成分表示をそれぞれ

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、和 $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, 差 $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ およびスカラー倍 $t\mathbf{p}$ (t は実数) の成分表示はそれぞれ次のようになる：

(9 - 8 a) $$\mathbf{p}+\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}-\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}, \qquad t\mathbf{p} = \begin{pmatrix} tp_1 \\ tp_2 \end{pmatrix}.$$

(**証明**)

位置ベクトルが $\mathbf{p}$ となるような点 P をとる。すると、P の座標は $\mathrm{P}(p_1, p_2)$ で与えられ、ベクトル $\mathbf{p}$ は $\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表わされる。

● 和について：$\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}$ となるように、点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ をとる。すると、$\mathbf{q}$ の成分表示は $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \end{pmatrix}$ となるから、

$$\begin{cases} q_1 = a_1 - p_1 \\ q_2 = a_2 - p_2 \end{cases}$$

が成り立つ。$\mathbf{p}+\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表わされるから、$\mathbf{p}+\mathbf{q}$ の成分表示は、

$$\mathbf{p}+\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + (a_1 - p_1) \\ p_2 + (a_2 - p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \end{pmatrix}$$

となる。

● 差について：位置ベクトルが $\mathbf{q}$ となるような点 Q をとる。Q の座標は $\mathrm{Q}(q_1, q_2)$ で与えられ、ベクトル $\mathbf{q}$ は $\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表わされる。$\mathbf{p}-\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と表わされるから、$\mathbf{p}-\mathbf{q}$ の成分表示は、$\mathbf{p}-\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}$ となる。

● スカラー倍について：点 B を座標が (tp_1, tp_2) によって与えられる点とする。

$t > 0$ のとき、点 B は、O から $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の向き延ばした半直線上の、線分比が $\mathrm{OP} : \mathrm{OB} = 1 : t$ となる点であるから、$t\mathbf{p}$ は有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により表わされる。したがって、その成分表示は、$t\mathbf{p} = \begin{pmatrix} tp_1 \\ tp_2 \end{pmatrix}$ である。

$t < 0$ のときも同様に考えて、$t\mathbf{p}$ の成分表示は上のように与えられることがわかる。また、$t = 0$ のとき、$t\mathbf{p} = \mathbf{0}$ となるので、その成分表示は、やはり、上のように与えられる。 □

例 9 - 8 - 2 ベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathbf{p}+\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix},\ \mathbf{p}-\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ 2\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

[定理 9 - 8 - 1] により、有向線分によって定義される幾何ベクトルから、その成分表示を経て縦に並んだ実数の組としてのベクトル、すなわち、数ベクトルの概念に至る。大学の数学においては、この数ベクトルを出発点におき、ベクトルおよび行列の理論を構築していくことになる。