§9. 行列式の余因子展開

前節において、n 次行列式を $(n-1)$ 次行列式の定数倍の交代和として帰納的に定義したが、それは「第１行に関して展開」した形をしている。ここでは、同様の展開式が、どの行、どの列に関しても可能であることを説明する。それがこれから述べる行列式の余因子展開である。

● 9-1：行列式の基本的性質 (一般の場合)

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ は、次のように、$(n-1)$ 次行列式の定数倍の交代和として帰納的に定義された：

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

n 次行列式についても、２次の場合と同様の性質 (Det1), . . . , (Det5) が成り立つ。すなわち、n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について、

(Det1) 第 i 行の各成分を２つの数の和に分けて、$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ $(j = 1, \cdots, n)$ とすれば、その行列式の値は、第 i 行をそれぞれ b_{ij}, c_{ij} で置き換えて得られる行列式の和に等しい。

$$\begin{vmatrix} & & \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ & & \end{vmatrix}$$

(Det2) ある行を t 倍すると値は t 倍になる。

$$\begin{vmatrix} & & \\ ta_{i1} & \cdots & ta_{in} \\ & & \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & & \end{vmatrix}$$

(Det3) ２つの行を入れ替えると符号が変わる。

$$\begin{vmatrix} & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & & \end{vmatrix}$$

(Det4) １つの行に他の行の t 倍を加えても、行列式の値は変わらない。

$$\begin{vmatrix} & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ a_{i1}+ta_{j1} & \cdots & a_{in}+ta_{jn} \\ & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & & \end{vmatrix}$$

(Det5) 行と列を入れ替えても値は変わらない：$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$.

注意 1°：(Det2) と (Det3) から次がわかる。

(Det2)$'$ ある行が全部 0 のとき値は 0 になる。
(Det3)$'$ ２つの行が同じとき値は 0 になる。

注意 2°：(Det5) により、(Det1), $\cdots$, (Det4) は「行」を「列」に変えても成立する。

例 9-1-1 帰納法により、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

が示される。より一般に次が示される：

$$\begin{vmatrix} A & \mathrm{O} \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D| \qquad \begin{pmatrix} \text{但し、} A,\ C,\ D \text{ は行列、} \\ A,\ D \text{ は正方行列、O は零行列} \end{pmatrix}$$

($A = (a_{ij})$ とおいて左辺の行列式を定義に従って書き下し、帰納法の仮定を適用する)。

● 9-2：余因子展開

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式は、性質 (Det1) を繰り返し用いて、次の ($\sharp$) ように書ける。(第 i 行を $a_{i1} = a_{i1} + 0,\ a_{i2} = 0 + a_{i2}, \cdots, a_{in} = 0 + a_{in}$ と考えて (Det1) を適用し、得られた第 2 項の行列式において、第 i 行を $0 = 0 + 0,\ a_{i2} = a_{i2} + 0,\ a_{i3} = 0 + a_{i3}, \cdots, a_{in} = 0 + a_{in}$ と考えて (Det1) を適用する。以下これを繰り替えして行けばよい。)：

$$(\sharp) \quad |A| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A_{i1}(\text{とおく})} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A_{i2}} + \cdots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A_{in}}$$

問 A_{ij} において、(i, j)-成分が $(1, 1)$-成分にくるようにするには、行と列の入れかえを何回行えばよいか？

最短 2 回で可能である。実際、第１行と第 i 行を入れ替えたのち、第 1 列と第 j 列を入れ替えればよい。しかし、こうすると、成分の添字の並び方が大きく変わってしまう。では、成分の添字の並び方をできるかぎり変えないで、(i, j)-成分が $(1, 1)$-成分にくるようにするには、行と列の入れ替えを何回行えばよいであろうか？

例 9 - 2 - 1 $n = 4,\ i = 3,\ j = 4$ のときを考える。例えば、$(3,4)$-成分を $(1,1)$-成分にくるように、行の入れ替え、列の入れ替えを行って、A_{34} は次のようになる：

$$A_{34} = (-1)^{3-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{3 行目と 2 行目を入れ替えた後、2 行目と 1 行目} \\ \text{を入れ替える。行の入れ替えを 2 回行なったので、} \\ (-1)^2 = (-1)^{3-1} \text{ 倍される}\end{array}\right)$$

$$= (-1)^{(3-1)+(4-1)}\begin{vmatrix} a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{4 列目と 3 列目を入れ替えてから、3 列目と} \\ \text{2 列目を入れ替えて、2 列目と 1 列目を入れ} \\ \text{替える。列の入れ替えを 3 回行なったので、} \\ (-1)^3 = (-1)^{4-1} \text{ 倍される}\end{array}\right)$$

$$= (-1)^{3+4}a_{34}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ (A\text{ から第 3 行と第 4 列を取り除いたものの行列式})}}. \quad \left(\begin{array}{l}\text{行列式の定義に基づいて計算。} \\ \text{後ろに } -0+0-0 \text{ が続くが、0 なので省いている}\end{array}\right)$$

一般の場合にも同様に考えて、

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 列を取り除いて} \\ \text{得られる } (n-1) \text{ 次正方行列} \end{vmatrix}$$

となることがわかる。

さて、$|A| = A_{i1} + A_{i2} + \cdots + A_{in}$ と書けていたから、n 次正方行列 A の行列式は、次のように表わされることがわかる：

$$\begin{aligned}|A| &= (-1)^{i+1}a_{i1} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 } i \text{ 行と第 1 列} \\ \text{を取り除いたもの} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2}a_{i2} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 } i \text{ 行と第 2 列} \\ \text{を取り除いたもの} \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 } i \text{ 行と第 } n \text{ 列} \\ \text{を取り除いたもの} \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{9 - 2 a}$$

上式の表示を行列式 $|A|$ の**第 i 行に関する余因子展開**と呼ぶ。第 1 行に関する余因子展開はこの授業における行列式の定義そのものである。

(9 - 2 a) において、A の代わりに転置行列 A^{T} で置き換えて、$|A^{\mathrm{T}}|$ を第 j 行に関して余因子展開すると、行列式の性質 (Det5) により、次の等式を得る：

$$\begin{aligned}|A| &= (-1)^{1+j}a_{1j} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 1 行と第 } j \text{ 列} \\ \text{を取り除いたもの} \end{vmatrix} + (-1)^{2+j}a_{2j} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 2 行と第 } j \text{ 列} \\ \text{を取り除いたもの} \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj} \times \begin{vmatrix} A\text{ から第 } n \text{ 行と第 } j \text{ 列} \\ \text{を取り除いたもの} \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{9 - 2 b}$$

この表示を行列式 $|A|$ の**第 j 列に関する余因子展開**と呼ぶ。

例 9 - 2 - 2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式の第 3 列に関する余因子展開は

$$|A| = (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

例 9-2-3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式を第 4 行に関して余因子展開すると、

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{4+1} \times 0 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{4+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。 □

行列式の計算においては、すぐに定義式に当てはめて計算するのではなく、(Det2), (Det3), (Det4) およびその「列バージョン」を使って、1 つの行あるいは 1 つの列に 0 ができるだけ多くなるようしてから、その列または行について余因子展開を行うとよい。

例 9-2-4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} ①\times(-2)+②,\ ①\times(-3)+③ \text{ を行っても} \\ \text{(Det4) により行列式の値は変わらない} \end{array} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 4 & -5 \\ -5 & 2 & -9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(第 1 列で余因子展開)}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 & -5 \\ -5 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 列から 2 を括り出すと (Det2) の} \\ \text{列バージョンにより行列式は 2 倍になる} \end{array} \right)$$

$$\overset{\substack{③\times(-2)+① \\ ③\times(-1)+②}}{=} 2 \begin{vmatrix} -10 & 0 & -7 \\ -8 & 0 & -10 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} -10 & -7 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = -88.$$

No.9　　2024年6月6日

線形代数1事前練習用演習問題

pre9-1. (余因子展開)

4次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & x & -1 & -x \\ b & 2 & x & -1 \\ c & -x & 2 & x \\ d & 1 & -x & 2 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を第1列に関して余因子展開することにより、

$$|A| = f_0(x)a + f_1(x)b + f_2(x)c + f_3(x)d$$

を満たす多項式 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を求めよ。

pre9-2. (行列式の計算)

次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & -11 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre9-1. [例9-2-2] と [例9-2-3] を参照。

$|A|$ を第1列に関して余因子展開すると、

$$|A| = (-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ -x & 2 & x \\ 1 & -x & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}b\begin{vmatrix} x & -1 & -x \\ -x & 2 & x \\ 1 & -x & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}c\begin{vmatrix} x & -1 & -x \\ 2 & x & -1 \\ 1 & -x & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}d\begin{vmatrix} x & -1 & -x \\ 2 & x & -1 \\ -x & 2 & x \end{vmatrix}$$

となる。したがって、

$$f_0(x) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ -x & 2 & x \\ 1 & -x & 2 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = 4x^2 + 10$$

である。同様に、$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ を計算すると、

$$f_1(x) = -3x,\ f_2(x) = 4x^2 + 5,\ f_3(x) = x$$

となることがわかる。

pre9-2. [例9-2-4] のように、(Det2), (Det3), (Det4) およびその「列バージョン」を使って、1つの行あるいは1つの列に0ができるだけ多くなるようしてから、その列または行について

余因子展開を行う。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & -11 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -7 & 13 \\ 2 & 3 & -2 & 9 \\ -3 & -11 & 11 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} \times (-2) + \boxed{3} \\ \boxed{1} \times 3 + \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 & 13 \\ 3 & -2 & 9 \\ -11 & 11 & -7 \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 行に関して余因子展開})$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -2 & 13 \\ 3 & 1 & 9 \\ -11 & 0 & -7 \end{vmatrix} \quad (\boxed{1} \times 1 + \boxed{2})$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 0 & 31 \\ 3 & 1 & 9 \\ -11 & 0 & -7 \end{vmatrix} \quad (② \times 2 + ①)$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= 264.$$

線形代数１・第 9 回 (2024 年 6 月 6 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第９回学習内容チェックシート 2024 年 6 月 6 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の n 次行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \text{\Large O} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\Large O} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \boxed{}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & \text{\Large O} & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \text{\Large O} & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{}$$

Q2. 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を

- 第 3 行に関して余因子展開した式を書きなさい：

$|A| =$

- 第 1 列に関して余因子展開した式を書きなさい：

$|A| =$

Q3. (特に 4 次以上の) 行列式を計算する際に、どのようなことを心掛けるとよいか？

上記のように考えた理由を下に書きなさい。

Q4. 第 9 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。