§9. 線形写像の核と像

(数ベクトル空間の間の) 線形写像に対して核、像と呼ばれる部分空間が定まる。行列 A から定まる線形写像 T_A の場合、核は A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解全体のなす部分空間に他ならず、像は行列 A の列ベクトルによって張られる空間に他ならない。ここでは、核と像の性質、および、核と像の次元と基底の求め方を学ぶ。

● 9-1：線形写像の核と像

線形写像 $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、

(9-1 a) $$\operatorname{Ker} F = \{\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid F(\mathbf{x})=\mathbf{0}\ \},\qquad \operatorname{Im} F=\{\ F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\ \}$$

をそれぞれ F の**核** (kernel)、**像** (image) と呼ぶ。$\operatorname{Ker} F,\ \operatorname{Im} F$ はそれぞれ「カーネル・エフ」「イメージ・エフ」と呼ぶことが多い。

例 9-1-1 行列 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-4&5&-6\end{pmatrix}$ から定まる線形写像 $T_A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ について、$T_A(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ であるから $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\notin\operatorname{Ker}T_A$ であり、$T_A(\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ となるので、$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}T_A$ である。 □

例 9-1-2 (m,n)-行列 $A=(\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ から定まる線形写像 $T_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ の核と像はそれぞれ次のようになる：

(9-1 b) $$\operatorname{Ker}T_A=\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\ \},$$

(9-1 c) $$\operatorname{Im}T_A=\operatorname{Span}\{\ \mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\ \}=\{\ t_1\mathbf{a}_1+\cdots+t_n\mathbf{a}_n \mid t_1,\ \cdots,t_n\in\mathbb{R}\ \}.$$

(証明)

$\operatorname{Ker}T_A$ については、核の定義をそのまま書いたに過ぎない。$\operatorname{Im}T_A$ について示す。“$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$” を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とすると、任意のベクトル $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ は

(9-1 d) $$\mathbf{x}=t_1\mathbf{e}_1+\cdots+t_n\mathbf{e}_n\qquad(t_1,\ \cdots,t_n\in\mathbb{R})$$

のように表わされる。このとき、T_A の線形性と $T_A(\mathbf{e}_j)=A\mathbf{e}_j=\mathbf{a}_j\ (j=1,\cdots,n)$ から

(9-1 e) $$T_A(\mathbf{x})=t_1T_A(\mathbf{e}_1)+\cdots+t_nT_A(\mathbf{e}_n)=t_1\mathbf{a}_1+\cdots+t_n\mathbf{a}_n$$

を得る。よって、

$$\operatorname{Im}T_A=\{\ T_A(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\ \}=\{\ t_1\mathbf{a}_1+\cdots+t_n\mathbf{a}_n \mid t_1,\ \cdots,t_n\in\mathbb{R}\ \}$$

と表わされる。 □

補題 9-1-3

線形写像 $F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ に対して、$\operatorname{Ker}F$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であり、$\operatorname{Im}F$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

(**証明**)

$\mathrm{Im}\,F$ が $\mathbb{R}^m$ の部分空間であることを示す（$\mathrm{Ker}\,F$ については演習問題とする）。

まず、

(9-1 f) $$\mathbf{0} \in \mathrm{Im}\,F$$

を示す。F の線形性と $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ により、

$$F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) + F(\mathbf{0})$$

となるので、この両辺に $-F(\mathbf{0})$ を加えることにより、$\mathbf{0} = F(\mathbf{0})$ が得られる。よって、$\mathbf{0} \in \mathrm{Im}\,F$ がわかった。

次に、任意の $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathrm{Im}\,F$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(9-1 g) $$\begin{cases} \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \in \mathrm{Im}\,F, \\ t\mathbf{x}' \in \mathrm{Im}\,F \end{cases}$$

となることを示す。$\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathrm{Im}\,F$ より、ある $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ を用いて $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}),\ \mathbf{y}' = F(\mathbf{y})$ と書き表わすことができる。このとき、F の線形性から

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' + \mathbf{y}' &= F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in \mathrm{Im}\,F, \\ t\mathbf{x}' &= tF(\mathbf{x}) = F(t\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}\,F \end{aligned}$$

を得る。(9-1 f) と (9-1 g) から、$\mathrm{Im}\,F$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間であることが示された。 □

● 9-2：核の次元と基底

線形写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ の核と像はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の部分空間であるから、基底および次元が考えられる。

例 9-2-1　3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ から定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ について、$\mathrm{Ker}\,T_A$ の次元と一組の基底を求める。まず、$\mathrm{Ker}\,T_A$ を求めよう。

$$\mathrm{Ker}\,T_A = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \}$$

であるから、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解を求めればよい。これをガウスの消去法を用いて解くことにより、

$$\mathrm{Ker}\,T_A = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

であることがわかる。したがって、その基底として "$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$" をとることができる。また、$\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底は 1 個のベクトルからなるので、$\dim(\mathrm{Ker}\,T_A) = 1$ である。 □

より一般に、(m,n)-行列 A から定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ について、$\mathrm{Ker}\,T_A$ は連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間に他ならないから、[定理 6-4-2] により、次を得る：

(9-2 a) $$\dim(\mathrm{Ker}\,T_A) = n - \mathrm{rank}\,A.$$

● 9 - 3 : 像の次元と基底

$\mathrm{Im}\, T_A$ の基底および次元を求めるため、$\mathbb{R}^n$ の有限個のベクトルによって張られる部分空間の基底と次元について考察する。

定理 9 - 3 - 1
$\mathbb{R}^n$ のベクトル "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$" によって張られる部分空間 $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k\}$ の次元は一次独立な組を構成する $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ の中の最大個数に等しい。さらに、"$\mathbf{a}_{i_1}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}$" がそのようなものの 1 組であったとすると、これは W の基底である。

この定理の証明は後で与える。この定理と [例 9 - 1 - 2] により、(m, n)-行列 $A = (\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ に対して、

(9 - 3 a) $\quad \dim(\mathrm{Im}\, T_A) = ($一次独立な組を構成する $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の中の最大個数$) = \mathrm{rank}\, A$

であることがわかる。

例 9 - 3 - 2 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ から定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, T_A$ は A の列ベクトル

$$\text{“}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{”}$$

によって張られる空間なので、$\mathrm{Im}\, T_A$ の基底は "$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$" の中から見つけることができる。$A$ に行基本変形を施すと、

$$A \xrightarrow{②+(-1)\times①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+(-1)\times②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって、$\dim(\mathrm{Im}\, T_A) = \mathrm{rank}\, A = 2$ である。さらに、行基本変形の下では一次独立となる列番号の組み合わせは変わらないので、"$\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2$" は一次独立であることがわかる。よって、これは $\dim(\mathrm{Im}\, T_A)$ の 1 組の基底である。 □

● 9 - 4 : [定理 9 - 3 - 1] の証明

一次独立な組を構成する $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ の中の最大個数を r とおく。また、"$\mathbf{a}_{i_1}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}$" がそれを与えるようなベクトルの 1 組であるとする。$\mathbf{a}$ の添字の番号を付け替えても W は変わらないから、必要ならば番号を付け替えて、最初の r 個のベクトル "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$" が一次独立であるとしてよい。このとき、各 $\mathbf{a}_j$ $(r+1 \leq j \leq n)$ は "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$" の一次結合として書ける。実際、$r$ の選び方から "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_j$" は一次独立でない。したがって、

(9 - 4 a)
$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_r\mathbf{a}_r + t_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$$

を満たす $t_1, \ \cdots, t_r, \ t_j \in \mathbb{R}$ であって、同時に 0 でないものが存在する。

今、$t_j = 0$ であると仮定する (背理法の仮定)。すると、(9 - 4 a) は $t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ となるが、"$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$" は一次独立であるから、$t_1 = \cdots = t_r = 0$ を得る。これは、$t_1, \ \cdots, t_r, \ t_j$ が同時に 0 でないことに反する。したがって、$t_j \neq 0$ でなければならない。これより、$\mathbf{a}_j$ は

(9 - 4 b)
$$\mathbf{a}_j = -\frac{1}{t_j}(t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_r\mathbf{a}_r)$$

のように “$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$” の一次結合として書ける。

さて、W は “$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$” によって張られているが、そのうちの $\mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_k$ は (9 - 4 b) の右辺で置き換えることができるので、W は最初の r 個のベクトル “$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$” で張られていることがわかる。しかも、これらは一次独立であったから、W の基底をなす。 □

● 9 - 5 : 次元公式

(9 - 2 a) と (9 - 3 a) より、線形写像の核と像の次元の間の関係式を得る。

定理 9 - 5 - 1 (次元公式)

線形写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、

(9 - 5 a) $$\dim(\mathrm{Ker}\, F) + \dim(\mathrm{Im}\, F) = n$$

が成り立つ。この等式を F に対する**次元公式**と呼ぶ。

(**証明**)

[定理 7 - 7 - 1] により、$F = T_A$ となる (m, n)-行列 A が存在する。(9 - 2 a) と (9 - 3 a) より、

$$\dim(\mathrm{Ker}\, F) = \dim(\mathrm{Ker}\, T_A) = n - \mathrm{rank}\, A = n - \dim(\mathrm{Im}\, T_A) = n - \dim(\mathrm{Im}\, F)$$

を得る。 □

No.9 2024年11月21日

線形代数2事前練習用演習問題

pre9-1. (線形写像の核)

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とする。

(1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ に対して、$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}')$ となることを証明せよ。

(2) $\mathrm{Ker}\, F = \{\mathbf{0}\}$ ならば、F は単射であることを証明せよ。

pre9-2. (張られる空間の次元と基底)

4 次列ベクトル

$$“\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}”$$

によって張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W とする。

(1) W の次元を求めよ。

(2) “$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$” の中から W の基底となるベクトルの組を 1 組選べ。

(3) $\mathbf{a}_5$ を (2) で選んだ基底の一次結合で表わせ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre9-1. (1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= F\bigl(\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}'\bigr) \quad (\mathbb{R}^n \text{ における和とスカラー倍の定義より}) \\ &= F(\mathbf{x}) + F\bigl((-1)\mathbf{x}'\bigr) \quad (F \text{ の線形性より}) \\ &= F(\mathbf{x}) + (-1)F(\mathbf{x}') \quad (F \text{ の線形性より}) \\ &= F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}') \quad (\mathbb{R}^m \text{ における和とスカラー倍の定義より}) \end{aligned}$$

となる。

(2) $\mathrm{Ker}\, F = \{\mathbf{0}\}$ であるとする。

$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ が $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}')$ を満たしていると仮定して、$\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ を導けばよい。

$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}')$ であるとき、(1) より、

$$\mathbf{0} = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}') = F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となる。よって、$\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \mathrm{Ker}\, F = \{\mathbf{0}\}$ を得る。これより、$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ すなわち、$\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ が導かれる。したがって、F は単射である。

pre9-2. (1) $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 9 & 9 & -11 \end{pmatrix}$ とおく。A をガウスの消去法に基づいて階段型にすると、行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。よって、$\dim W = \mathrm{rank}\, A = 3$ である。

(2) 上で求めた行列 B の (第 5 列を除いた) 列ベクトルの中から一次独立であるものの組を、「段」が下がるところに注目して $\dim W = 3$ 個選ぶと、

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。行基本変形において、一次独立となる列番号の組み合わせは変わらないので、A の列ベクトルの中から第 1 列、第 2 列、第 4 列を選ぶと、この組は一次独立なことがわかる。W の中の $\dim W = 3$ 個からなる一次独立なベクトルの組は基底をなすから、

$$\text{“}\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\text{”}$$

は W の基底である。

(3) $A' = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{a}_5)$ とおくと、$\operatorname{rank} A' = 3 = \dim W$ となるから、$\mathbf{a}_5 \in W$ であることがわかり、行基本変形により、A' は階段行列

$$B' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

に変形されることから、連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ & & y & + & 3z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

を後退代入で解くことにより、

$$\mathbf{a}_5 = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_4$$

のように表わされることがわかる。

線形代数２・第９回 (2024 年 11 月 21 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第９回学習内容チェックシート 2024 年 11 月 21 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とする。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
F の核 $\operatorname{Ker} F$ とは？	p.	
F の像 $\operatorname{Im} F$ とは？	p.	
F に対する次元公式とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 任意の線形写像 $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対して $F(\mathbf{0}) = \boxed{}$ である。
- 線形写像 F に対して、$\operatorname{Ker} F$ は「$\boxed{}$ エフ」と読み、$\operatorname{Im} F$ は「$\boxed{}$ エフ」と読む。
- $A = (\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ を (m,n)-行列とする。ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を、$\mathbb{R}^n$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$” の一次結合で

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{e}_1 + \cdots + t_n\mathbf{e}_n \qquad (t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R})$$

と表わす。$A\mathbf{e}_j = \boxed{}$ $(j = 1, \cdots, n)$ なので、$T_A(\mathbf{x})$ は A の列ベクトルの一次結合により

$$T_A(\mathbf{x}) = \boxed{}$$

のように表される。このことから、$\operatorname{Im} T_A$ は $\boxed{}$ によって張られる $\mathbb{R}^m$ の部分空間に等しいことがわかる。一方、$\operatorname{Ker} T_A$ は連立一次方程式 $\boxed{}$ の解空間に等しい。

- (m,n)-行列 A から定まる線形写像 $T_A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、その核と像の次元は

$$\dim(\operatorname{Ker} T_A) = \boxed{}, \qquad \dim(\operatorname{Im} T_A) = \boxed{}$$

を使って求められる。例えば、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のときには、$\dim(\operatorname{Ker} T_A) = \boxed{}$, $\dim(\operatorname{Im} T_A) = \boxed{}$ である。

Q3. n 次元列ベクトルの組 “$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$” によって張られる部分空間 W の次元およびその１組の基底を求めるにはどのようにすればよいか。その１つの方法・手順を書きなさい。

Q4. 第９回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。