

§9. 正規変換の固有値と標準形

ここでは、ユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列の固有値が取り得る値を調べ、それらをユニタリ行列で対角化したときの対角行列の形を求める。エルミート行列の固有値が実数であることに注目し、すべての固有値が非負のエルミート行列に対しては平方根をとることができることと、このような行列を用いると、複素数に対する極形式に相当するものが任意の複素正方行列に対しても存在することを示す。

● 9-1 : 正規変換の固有値と固有ベクトル

ここでは、正規変換の固有値と固有ベクトルが持つ性質を調べる。

線形写像 $T: V \rightarrow U$ の核 (kernel) とは、 V の部分集合

$$(9-1 a) \quad \text{Ker} T = \{ v \in V \mid T(v) = 0_U \}$$

のことをいうのであった。これは V の部分空間となる。

T が複素ベクトル空間 V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換であるとき、各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換 $T - \lambda \text{id}_V$ を

$$(T - \lambda \text{id}_V)(v) = T(v) - \lambda v \quad (v \in V)$$

によって定義すると、固有値に関して次の言い換えが成立する：

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C} \text{ が } T \text{ の固有値} &\iff T(v) - \lambda v = 0_V \text{ となる } 0_V \text{ でない } v \in V \text{ が存在する} \\ &\iff \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_V) \neq \{0_V\}. \end{aligned}$$

補題 9-1-1

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、 T を V 上の正規変換とする。このとき、

- (1) $\text{Ker} T = \text{Ker} T^*$.
- (2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $T - \lambda \text{id}_V$ は正規である。

(証明)

- (1) $v \in \text{Ker} T$ とすると、

$$\langle T^*(v), T^*(v) \rangle = \langle v, ((T^*)^* \circ T^*)(v) \rangle = \langle v, (T \circ T^*)(v) \rangle = \langle v, (T^* \circ T)(v) \rangle = \langle v, 0_V \rangle = 0$$

となる。したがって、 $v \in \text{Ker} T^*$ である。今の議論を T が T^* の場合に適用して、 $v \in \text{Ker} T^*$ のとき、 $v \in \text{Ker}(T^*)^* = \text{Ker} T$ となることがわかる。こうして、 $\text{Ker} T = \text{Ker} T^*$ が示された。

- (2) は易しいので演習問題として残しておく。 □

補題 9-1-2

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、 T を V 上の正規変換とする。 $\lambda \in \mathbb{C}$ が T の固有値ならば、 $\bar{\lambda}$ は T^* の固有値であり、2つの固有空間の間に $W(\lambda, T) = W(\bar{\lambda}, T^*)$ が成り立つ。

(証明)

[補題 9-1-1] より、 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$W(\lambda, T) = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_V) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda} \text{id}_V) = W(\bar{\lambda}, T^*)$$

が成り立つ。したがって、

$$\lambda \text{ は } T \text{ の固有値} \iff \bar{\lambda} \text{ は } T^* \text{ の固有値}$$

も成立する。 □

● 9-2 : ユニタリ変換、(歪)エルミート変換の固有値と標準形

ユニタリ変換、エルミート変換、歪エルミート変換の固有値は、次の補題のように特徴がある。

補題 9-2-1

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、 T を V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換、 $\lambda \in \mathbb{C}$ を T の固有値とする。

- (1) T がユニタリ変換 $\implies |\lambda| = 1$.
 (2) T がエルミート変換 $\implies \lambda \in \mathbb{R}$.
 (3) T が歪エルミート変換 $\implies \lambda \in \mathbb{R}i$ (純虚数).

(証明)

$v \in V$ を λ に属する T の固有ベクトルとする。 T が正規変換ならば、[補題 9-1-2] により、 v は T^* の固有値 $\bar{\lambda}$ に属する固有ベクトルである。したがって、 $v (\neq 0_V)$ は、

$$T(v) = \lambda v, \quad T^*(v) = \bar{\lambda} v$$

を満たす。 T がユニタリ変換ならば、 T は正規変換であり、 $T^* = T^{-1}$ であるから、

$$T(v) = \lambda v, \quad T^{-1}(v) = \bar{\lambda} v$$

が成り立つ。 $T(v) = \lambda v$ より $\lambda^{-1}v = T^{-1}(v)$ となるので、 $\lambda = \overline{\lambda^{-1}}$ でなければならない。これは $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$ に同値である。これで、(1) が示された。同じ要領で (2) と (3) を示すことができる。□

$A \in M_n(\mathbb{C})$ を正規行列とすると、あるユニタリ行列 U に対して $U^{-1}AU$ は対角行列となる ([定理 8-2-3])。その対角成分には A の固有値が並ぶから、上の補題と合わせて次がわかる。

- A がユニタリ行列のとき、 A はあるユニタリ行列により、次の形の行列に対角化される。

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \mathbf{O} \\ & e^{i\theta_2} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \quad (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R})$$

- A がエルミート行列のとき、 A はあるユニタリ行列により、次の形の行列に対角化される。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$$

- A が歪エルミート行列のとき、 A はあるユニタリ行列により、次の形の行列に対角化される。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 i & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 i & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n i \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$$

● 9-3 : 正定値エルミート行列

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量空間とし、 T を V 上のエルミート変換とする。すると、 T の固有値はすべて実数である。もし、 T のすべての固有値が 0 以上ならば、 T は半正定値であると呼

ばれ、 T のすべての固有値が正ならば、**正定値**であると呼ばれる。エルミート行列に対しても、半正定値、正定値という概念が同様に定義される。

エルミート行列は実数に近い役割を持つ行列であり、半正定値であるという条件は0以上の実数に相当し、正定値であるという条件は正の実数に相当する。

定理 9-3-1

- (1) 任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、 A^*A , AA^* は常に半正定値エルミートである。 A が正則のときには、 A^*A , AA^* は正定値である。
- (2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が半正定値エルミートならば、 $A = X^2$ を満たす半正定値エルミート行列 X が一意的に存在する。

注意. 上の結果は $\mathbb{C}$ における事実「任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $\bar{z}z \geq 0$ 」と「任意の実数 $a \geq 0$ に対して $a = x^2$ を満たす実数 $x \geq 0$ が一意的に存在する」に対応している。

([定理 9-3-1] の証明)

(1) A^*A に対してのみ示す (AA^* については、 A の代わりに A^* を用いればよい)。

$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ であるから、 A^*A はエルミートである。また、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して、 $\langle A^*A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle \geq 0$ であるから、 A^*A は半正定値である ($\because \lambda \in \mathbb{R}$ を A^*A の固有値とし、 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ をそれに属する固有ベクトルとすると、 $0 \leq \langle A^*A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ となる)。

A が正則ならば、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) に対して、 $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となるから、 $\langle A^*A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ である。したがって、 A^*A の任意の固有値は正でなければならない。

(2) A を半正定値エルミート行列とすると、

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{O} & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0)$$

を満たすユニタリ行列 U が存在する。今、

$$X = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{O} \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ \mathbf{O} & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U^{-1}$$

と定義すれば、 X は半正定値エルミート行列であり、 $X^2 = A$ を満たすことがわかる。

次に、 X の一意性を示す。 A の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ とする。

$$\Delta_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_s)^{m_s}$$

と書くと、 A は対角化可能であるから、すべての $i = 1, \dots, s$ に対して $m_i = \dim W(\lambda_i, T_A)$ となる。さらに、各 $W(\lambda_i, T_A)$ から基底 $\mathcal{B}_i$ をとり、それらを並べて $\mathbb{C}^n$ の基底 $\mathcal{B}$ を作る事ができる。

X を $X^2 = A$ を満たす半正定値エルミート行列とする。 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ がすべて非負の実数であることから、 X の相異なる固有値の全体は $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_s}$ となることがわかる。よって、

$$\Delta_X(x) = (x - \sqrt{\lambda_1})^{k_1} \cdots (x - \sqrt{\lambda_s})^{k_s}$$

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre9-1. 2 次複素正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$ は半正定値エルミートか否かを調べ、半正定値エルミートの場合には $A = X^2$ を満たす半正定値エルミート行列 X を求めよ。

pre9-2. 任意の n 次複素正方行列 X は $X = A + iB$ (A, B はエルミート行列) の形に一意的に書き表わされることを示せ。

ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre9-1. A の固有値を求めて、どれも 0 以上であるか否かを調べてればよい。

まず、 A は $A^* = A$ を満たしているからエルミート行列であることがわかる。次に、 A の固有多項式を計算すると、 $\Delta_A(x) = (x-3)(x-6)$ であることがわかる。よって、 A の固有値は 3, 6 であるから、 A は (半) 正定値である。

A の各固有値に属する固有空間は次のようになる：

$$W(3, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad W(6, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

そこで、

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと、これらは互いに直交し、大きさ 1 となるので、 $U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列である。

$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ となるから、

$$X = U \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + \sqrt{6} & (-\sqrt{3} + \sqrt{6})(1-i) \\ (-\sqrt{3} + \sqrt{6})(1+i) & \sqrt{3} + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおくと、 X は $A = X^2$ を満たす半正定値エルミート行列であることがわかる。

pre9-2. ● X が問題で与えられている式のように書き表されること：

$$A = \frac{X + X^*}{2}, \quad B = \frac{X - X^*}{2i} \quad \text{と定めると、} \quad A^* = A, \quad B^* = B, \quad X = A + iB \quad \text{を満たす。}$$

● エルミート行列 A, B の一意性：

$X = A + iB = A' + iB'$ (A, B, A', B' はすべてエルミート行列) のように 2 通りに表わされたとする。すると、

$$A - A' = i(B' - B) \quad \dots\dots\dots ①$$

となる。この両辺の随伴をとると、 $A - A', B' - B$ がエルミートであることから、

$$A - A' = -i(B' - B) \quad \dots\dots\dots ②$$

を得る。①, ②より、 $A - A' = i(B' - B) = -(A - A')$ となるため、 $2(A - A') = 0$, すなわち、 $A = A'$ がわかる。これを①に代入して $B' - B = 0$, すなわち、 $B = B'$ がわかる。これで、一意性も示された。

第9回(2025年6月9日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. $T: V \rightarrow U$ を $\mathbb{K}$ -線形写像 $T: V \rightarrow U$ とする。(i) T の核 $\text{Ker } T$ はどんな集合か？ $\text{Ker } T =$ _____(ii) $V = U$ とする。 $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して、写像 $T - \lambda \text{id}_V$ はどんな写像か？その定義を書け。Q2. T を有限次元エルミート計量空間 V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換とする。 T が以下の変換のとき、その固有値 λ はどんな条件を満たす複素数か。(i) T がユニタリ変換のとき、 _____(ii) T がエルミート変換のとき、 _____(iii) T が歪エルミート変換のとき、 _____Q3. $A \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列のそれぞれの場合に、適当なユニタリ行列 U により $U^{-1}AU$ はどのような形の対角行列にすることができるか？

[ユニタリ行列のとき]

[エルミート行列のとき]

[歪エルミート行列のとき]

Q4. $A \in M_n(\mathbb{C})$ をエルミート行列とする。 A が半正定値、正定値であるとはそれぞれどんな条件が満たされるときをいうか。

[半正定値]

[正定値]

Q5. エルミート行列は実数に近い役割をもつ複素行列である。このことを踏まえて、複素数関する以下の各結果に対応する、エルミート行列に関する結果を答えよ。

(1) 「任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $\bar{z}z \geq 0$ である」(2) 「任意の実数 $a \geq 0$ に対して $a = x^2$ を満たす実数 $x \geq 0$ が一意的に存在する」(3) 「0 でない任意の $z \in \mathbb{C}$ は $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) の形に一意的に表わされる」

Q6. 第9回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。