§9. 極値問題

ここでは、2 変数関数の極値を偏微分を使って求める方法を説明する。極値の候補は $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ を解くことにより求めることができた。ここでは、それらの候補の中から実際に極値になっているものを決定する際に有効な判定法— ヘッシアン $\mathrm{H}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2$ の符号を調べる方法—-について説明する。

● 9 - 1 : 2 変数関数の極値と偏導関数 (復習)

$f(x,y)$ を領域 D 上で定義された関数とする。$f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で**極大** (resp. **極小**) であるとは、十分小さく $\varepsilon > 0$ をとると、$U_\varepsilon(a,b)$ に含まれる任意の点 $(x,y)(\neq (a,b))$ に対して $f(x,y) < f(a,b)$ (resp. $f(x,y) > f(a,b)$) となるときをいうのであった。このとき、$f(a,b)$ を $f(x,y)$ の**極大値** (resp. **極小値**) といい、極大値と極小値を総称して**極値**と呼ぶのであった。

2 変数関数が偏微分可能な場合、その極値の候補は次の定理を利用して求められることを思い出そう：

定理 9 - 1 - 1

領域 D 上で定義された偏微分可能な関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で極値をとるならば、$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ である。

● 9 - 2 : ヘッシアン判定法

[定理 9 - 1 - 1] により極値の候補は求まるが、実際に極値になっているかどうかはわからないし、極値になっていたとしても極大なのか極小なのかもわからない。次の定理で述べられている判定法使うと、これらの問題が解決されることが多い。

定理 9 - 2 - 1

領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能であり、2 階までのすべての偏導関数はすべて連続であるとする。$(a,b) \in D$ に対して、

$$(\mathrm{H}f)(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\Big)^2 \tag{9 - 2 a}$$

とおく。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \tag{9 - 2 b}$$

であるとき、次が成り立つ。

(1) $(\mathrm{H}f)(a,b) > 0$ かつ

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極小である。

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極大である。

(2) $(\mathrm{H}f)(a,b) < 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない。

(9 - 2 a) によって与えられる $(\mathrm{H}f)(a,b)$ を f の (a,b) における**ヘッシアン**という。行列式を使えば、ヘッシアンは次のように書くこともできる：

$$(9\text{ - }2\text{ c}) \qquad (\mathrm{H}f)(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}.$$

例 9 - 2 - 2　関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\sqrt{2}xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ の極値とその極値を与える点を求めよう。

$f(x,y)$ の極値の候補を求めるために、

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3\sqrt{2}y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3\sqrt{2}x = 0$$

を解く。第１式より、$y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$ を得る。これを第２式に代入して、$\dfrac{x^4}{2} - \sqrt{2}x = 0$　を得る。これを解いて、$(*)$ の解は

$$(x,y) = (0,0),\ (\sqrt{2},\sqrt{2})$$

であることがわかる。このそれぞれについて、実際に $f(x,y)$ の極値を与える点かどうかを調べる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\sqrt{2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

であるから、

$$(\mathrm{H}f)(x,y) = (6x)(6y) - (-3\sqrt{2})^2 = 36xy - 18$$

である。

- $(\mathrm{H}f)(0,0) = -18 < 0$ なので、$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらない。
- $(\mathrm{H}f)(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 36 \cdot 2 - 18 = 18 \cdot 3 > 0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0$ なので、$f(x,y)$ は $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小であり、その極小値は $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ である。　□

例 9 - 2 - 3　関数 $f(x,y) = x^2 - 4xy^2 + 4y^4 - y^6 + 1$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ の極値とその極値を与える点を求めよう。

$f(x,y)$ の極値の候補を求めるために、

$$(**) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y^2 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -8xy + 16y^3 - 6y^5 = 0$$

を解く。この解は $(x,y) = (0,0)$ のみである。$(0,0)$ が実際に極値になっているかどうかを調べる。任意の点 (x,y) におけるヘッシアンは

$$(\mathrm{H}f)(x,y) = 2 \cdot (-8x + 48y^2 - 30y^4) - (-8y)^2$$

であるから、

$$(\mathrm{H}f)(0,0) = 0$$

がわかる。よって、[定理 9 - 2 - 1] の極値判定法は使えない。そこで、$(0,0)$ 付近での $f(x,y)$ の様子を直接調べる。

$f(x,y)$ は x 軸上で

$$f(x,0) = x^2 + 1$$

となるので、$f(x,y)$ を x 軸上に制限すると、$(0,0)$ で極小となっている。つまり、$(0,0)$ のどんな近くにも $f(x_1,y_1)>1=f(0,0)$ となる点 (x_1,y_1) が存在する。

一方、

$$f(x,y)=(x-2y^2)^2-y^6+1$$

と書けるので、$f(x,y)$ は方程式 $x-2y^2=0$ で表わされる曲線 (具体的には放物線) 上で $f(x,y)=-y^6+1$ となることがわかる。したがって、$(0,0)$ のどんな近くにも $f(x_2,y_2)<1=f(0,0)$ となる点 (x_2,y_2) が存在する。

以上より、$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらないとわかる。 □

● 9 - 3 : [定理 9 - 2 - 1] の略証

h,k を十分小さくとって、[定理 8 - 3 - 1] を適用すると、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,b+\theta k)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,b+\theta k)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,b+\theta k)k^2\Big)\quad(0<\theta<1)$$

となるが、(9 - 2 b) により、

$$\begin{aligned}&f(a+h,b+k)-f(a,b)\\ (☆)\qquad&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,b+\theta k)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,b+\theta k)k^2\Big)\\ &\quad(0<\theta<1)\end{aligned}$$

が成立する。ここで、

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b),\qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

とおき、

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(h,k)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,b+\theta k)-A,\\ \varepsilon_2(h,k)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,b+\theta k)-B,\\ \varepsilon_3(h,k)&=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,b+\theta k)-C\end{aligned}$$

とおくと、(☆) は次のように表わされる：

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}\big(\varepsilon_1(h,k)h^2+2\varepsilon_2(h,k)hk+\varepsilon_3(h,k)k^2\big).$$

そこで、

$$o(h,k)=\frac{1}{2}(\varepsilon_1(h,k)h^2+2\varepsilon_2(h,k)hk+\varepsilon_3(h,k)k^2)$$

とおく。第 2 次偏導関数はすべて連続であることから、$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_i(h,k)=0\ (i=1,2,3)$ となり、したがって、

$$(★)\quad f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(h,k),\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{o(h,k)}{h^2+k^2}=0$$

が成立することがわかる。これより、

(9 - 3 a) $$Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

とおくと、h,k が十分 0 に近いとき、$f(a+h,b+k)-f(a,b)$ は $\frac{1}{2}Q(h,k)$ で近似できることがわかる (精密な議論は教科書 p.92 を参照)。$A\neq 0$ のとき、

$$Q(h,k)=A\Big(h+\frac{B}{A}k\Big)^2+\frac{CA-B^2}{A}k^2$$

と書き換えられる。

(1) $CA-B^2>0$ のとき、

- $A>0$ ならば、

$$(h,k)\neq(0,0)\quad\Longrightarrow\quad Q(h,k)>0$$

であるから、十分 0 に近い h,k (但し、$(h,k)\neq(0,0)$) に対して、$f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$ となる。これは f が (a,b) において極小となることを意味する。

- $A<0$ ならば、

$$(h,k)\neq(0,0)\quad\Longrightarrow\quad Q(h,k)<0$$

であるから、十分 0 に近い h,k (但し、$(h,k)\neq(0,0)$) に対して、$f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$ となる。これは f が (a,b) において極大となることを意味する。

(2) $CA-B^2<0$ のとき、

- $A\neq 0$ のとき

$$Q\big(h,0\big)=Ah^2,\qquad Q\big(-\frac{kB}{A},k\big)=\frac{CA-B^2}{A}k^2$$

となる。したがって、$(0,0)$ のいくらでも近くに $Q(h_1,k_1)>0$ となる (h_1,k_1) と $Q(h_2,k_2)<0$ となる (h_2,k_2) がある。よって、$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない。

- $A=0$ のとき、$0\cdot C-B^2<0$ より、$B\neq 0$ である。

$$Q\big(\frac{kC}{B},k\big)=3k^2C,\qquad Q\big(-\frac{kC}{B},k\big)=-k^2C$$

となる。したがって、$C\neq 0$ であれば、$(0,0)$ のいくらでも近くに $Q(h_1,k_1)>0$ となる (h_1,k_1) と $Q(h_2,k_2)<0$ となる (h_2,k_2) がある。よって、$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない。

$C=0$ のときは、$Q(h,k)=2Bhk$ となる。

$$Q\big(\frac{k}{B},k\big)=2k^2,\qquad Q\big(-\frac{k}{B},k\big)=-2k^2$$

となるから、$(0,0)$ のいくらでも近くに $Q(h_1,k_1)>0$ となる (h_1,k_1) と $Q(h_2,k_2)<0$ となる (h_2,k_2) がある。よって、$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない。 □

2026 年 11 月 19 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第 9 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
２回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ の (a,b) におけるヘッシアン $(\mathrm{H}f)(a,b)$ とは？	p.	

Q2. 次の $\square$ に適当な言葉や数式・記号を入れなさい。

領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ は２回偏微分可能で、かつ、２階までの偏導関数がすべて連続であるとする。$f(x,y)$ の極値を与える点の候補は方程式

$$\square = \square = 0$$

を解くことより求められる。

上の方法で極値を与える点の候補 (a,b) が求められたとする。このとき、(a,b) において実際に $f(x,y)$ が極値をとるかどうかを知るには、$\square$ の符号を調べるとよい。

- $\square > 0$ であれば、$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとることがわかる。さらに、
  $\square$ であれば $f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとり、また、
  $\square$ であれば $f(x,y)$ は (a,b) で極大値をとることがわかる。
- $\square < 0$ であれば、$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらないことがわかる。
- $\square = 0$ のときには (a,b) で極値をとるともとらないとも言えない。

Q3. 領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ は２回偏微分可能で、かつ、２階までの偏導関数がすべて連続であるとします。ヘッシアンを使っても (a,b) で極値をとるかとらないかが判定できないとき、どんな手段を使ってそれを調べればよいですか。１つの方法を書きなさい。

Q4. 第９回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。