§10. 平面図形のベクトルによる表現

この節では、行列との積を扱うため、(x, y)-座標平面上の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のように縦ベクトルで表示する。この視点の下では、(x, y)-座標平面は

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

により与えられる。平面上の線分、直線、平行四辺形、三角形をベクトルによる表わし方と、線形写像によるそれらの像がどのような図形なるのかを考察する。

● 10 - 1 : 線分・直線のベクトル表現

直線と線分はどちらも 1 本の「線」により描かれる図形である。その違いは、直線は両方向に無限に続くのに対して、線分はある異なる 2 点で区切られた範囲に限定されるということである。

例 10 - 1 - 1 (x, y)-座標平面において、方程式 $y = 2x + 1$ によって表わされる直線 L を考える。直線 L 上の点の x 座標を $t \in \mathbb{R}$ とおくと y 座標は $2t + 1$ であるから、直線 L 上の任意の点は

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように表わされる。よって、$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$L = \{\, t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ と書くことができる。$\mathbf{a}$ を L の**方向ベクトル**という。 □

一般に、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の直線は、$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でないあるベクトル $\mathbf{a}$ とあるベクトル $\mathbf{b}$ を用いて、

$$\{\, t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

により与えられる。

直線の方向ベクトルは 1 つに決まらない。$\mathbf{a}$ が直線 L の方向ベクトルならば、0 でない実数 t_0 に対して $t_0\mathbf{a}$ も L の方向ベクトルである。 □

異なる 2 点 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ を端点にもつ線分は

$$\{\, (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid t \in [0, 1] \,\}$$

により与えられる。一方、2 点 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ を通る直線は

$$\{\, t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

により与えられる。

● 10 - 2 : 行列から定まる線形写像

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が与えられると、

(10 - 2 a) $$T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

のようにして写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が定まる：

(10 - 2 b) $$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2).$$

T_A を行列 A から定まる**線形写像**と呼ぶ。

補題 10 - 2 - 1

2 正方行列 A から定まる線形写像 T_A は線形性と呼ばれる次の 2 つの性質をを持つ。任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(i) $T_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y})$.

(ii) $T_A(t\mathbf{x}) = tT_A(\mathbf{x})$.

(**証明**)

(i) は、$T_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y})$ のように示される。(ii) も同様に、$T_A(t\mathbf{x}) = A(t\mathbf{x}) = t(A\mathbf{x}) = tT_A(\mathbf{x})$ のように示される。 □

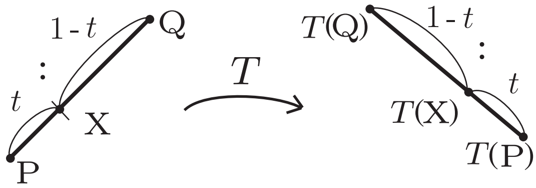
集合 X から集合 Y への写像 $f: X \longrightarrow Y$ を考える。X の部分集合 S に対して、Y の部分集合

(10 - 2 c) $$f(S) = \{\ f(s) \mid s \in S\ \}$$

を f による S の**像**と呼ぶ。これは s が S の中を自由に動き回るときの $f(s)$ の取りうる値の範囲を表わしている。

● 10 - 3：線形写像と線分・直線

2 正方行列 A から定まる線形写像 $T = T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の性質を図形の面から調べよう。平面上に異なる 2 点 P, Q をとり、この 2 点を端点とする線分が T によってどのようなものに写されるのかを考察しよう。点と位置ベクトルの同一視により、P, Q をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ とみなす。簡単のために、$T(\mathbf{p}) \neq T(\mathbf{q})$ を仮定する。P, Q を端点とする線分上の点 X は $t \in [0,1]$ として $(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ によって表わされる。これを T で写したものは、線形性から、



(10 - 3 a) $$T((1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}) = T((1-t)\mathbf{p}) + T(t\mathbf{q}) = (1-t)T(\mathbf{p}) + tT(\mathbf{q})$$

となる。したがって、線分 PQ を $t : 1-t$ に内分する点は、T により、線分 $T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})$ を $t : 1-t$ に内分する点に写されていることがわかる。

以上の考察から、幾何学的には、$T = T_A$ は線分の内分比を保つような写像である、と言うことができる。

<u>**例 10 - 3 - 1**</u> 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ により、直線 $L = \left\{\ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\}$ がどのような図形に写されるのかを調べる。線形性により、

$$\begin{aligned} T_A(L) &= \left\{\ tT_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) + T_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\} \\ &= \left\{\ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\} \end{aligned}$$

であるから、L は T_A により点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通り、L に平行な直線に写される。

次に、方程式 $y = -2x + 1$ によって表わされる直線 $M = \left\{\ t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$ が T_A

によりどのような図形に写されるのかを調べる。同様の考察すると、

$$T_A(M) = \left\{ t\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

がわかる。したがって、直線 M は写像 T_A により 1 点集合 $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\}$ に写される。 □

● 10 - 4 : 平行四辺形のベクトル表示と線形写像による像

(x, y)-座標平面において 3 点 O $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, P $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, Q $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ が同一直線上にないとき、点 R $\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$ をとると、線分 OP, PR, RQ, QO で囲まれた部分は平行四辺形をなす。この平行四辺形を D とおく。$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと、O, P, Q は同一直線上にないからベクトルの組 "$\mathbf{p}, \mathbf{q}$" は**一次独立**である、すなわち、$s\mathbf{p} + t\mathbf{q} = \mathbf{0}$ を満たす $s, t \in \mathbb{R}$ は $s = t = 0$ のみである。さらに、D は $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を用いて次のように表わされる：

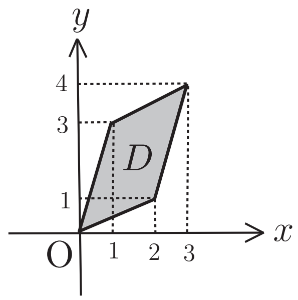
(10 - 4 a) $$D = \{ \, s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid 0 \leq s, t \leq 1 \, \}.$$

D を $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ により張られる平行四辺形という。

<u>**例 10 - 4 - 1**</u> 右図で与えられる（周とその内部からなる）平行四辺形 D を考える。$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ とおくと、

$$D = \{ \, s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid 0 \leq s, t \leq 1 \, \}$$

と表わされる。



D を行列 $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ により写すと、T_A による像は

$$\begin{aligned} T_A(D) &= \{ \, sA\mathbf{p} + tA\mathbf{q} \mid 0 \leq s, t \leq 1 \, \} \\ &= \left\{ s\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix} \middle| 0 \leq s, t \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

で与えられることがわかる。これは、4 点 O, P$'$ $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, Q$'$ $\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$, R$'$ $\begin{pmatrix}11\\-7\end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の周および内部を表わす。 □

注意. 上では、頂点に原点 O が含まれるときの平行四辺形を扱った。もし、平行四辺形 D の頂点 A, P, Q, R に原点が含まれないのならば、

$$\text{点 X が } D \text{ の内部または周上にある} \iff \overrightarrow{\mathrm{AX}} = s\overrightarrow{\mathrm{AP}} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \ \ (0 \leq s, t \leq 1)$$

が成り立つため、$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと、

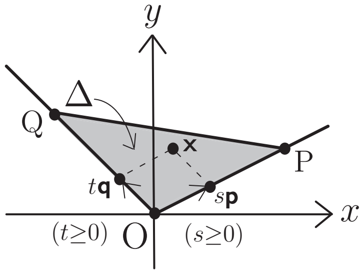
(10 - 4 b) $$D = \{ \, \mathbf{a} + s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid 0 \leq s, t \leq 1 \, \}$$

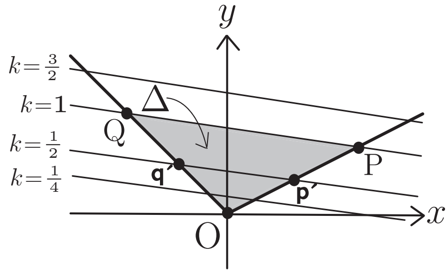
と表わされることがわかる。これが線形代数学における平行四辺形の一般形である。

● 10 - 5 : 三角形のベクトル表示と線形写像による像

原点 O と点 P, Q の 3 点を頂点とする三角形の周および内部からなる集合を Δ とおく。Δ をベクトルの集合で表わそう。$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと、"$\mathbf{p}, \mathbf{q}$" は一次独立なので、平面 $\mathbb{R}^2$

上の任意の点 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} = s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ のように表わされる。点 $\mathbf{x}$ が Δ 内に存在するには、$s \geq 0,\ t \geq 0$ でなければならないことはよいであろう (下図左を参照)。$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ なら $s = t = 0$ なので $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の場合を考える。$k = s + t$ とおくと、$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のため、$k > 0$ になる。





$\mathbf{p}' = k\mathbf{p},\ \mathbf{q}' = k\mathbf{q}$ とおくと、$\mathbf{x} = \dfrac{s}{k}\mathbf{p}' + \dfrac{t}{k}\mathbf{q}'$ $\left(\dfrac{s}{k} + \dfrac{t}{k} = 1\right)$ と表わされるため、$\mathbf{x}$ は 2 点 $\mathbf{p}', \mathbf{q}'$ を結ぶ直線上にあるが、k を正の実数の範囲で動かすことにより、

$$\text{点 } \mathbf{x} \text{ が } \Delta \text{ の内部または周上にある} \quad \Longleftrightarrow \quad k \leq 1$$

であることがわかる (上図右を参照)。こうして、Δ の集合による表示

(10 - 5 a)
$$\Delta = \{\ s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \}$$

が得られる。頂点に原点が含まれない三角形の場合には、一次独立なベクトル "$\mathbf{p}, \mathbf{q}$" とベクトル $\mathbf{a}$ を用いて、$\{\ \mathbf{a} + s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \}$ のように表わされる。これが線形代数学における三角形の一般形である。

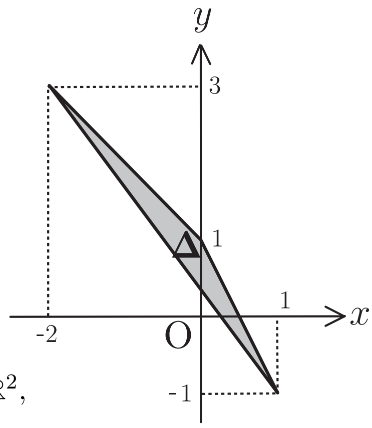
例 10 - 5 - 1 3 点 $\mathrm{K}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \mathrm{P}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \mathrm{Q}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を頂点とする、$\mathbb{R}^2$ 内の三角形の周および内部を Δ とする。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{KP}} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \overrightarrow{\mathrm{KQ}} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\Delta = \{\ \mathbf{a} + s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \}$$

と表わされる。行列 A を $A = \begin{pmatrix}7 & 5\\3 & 2\end{pmatrix}$ とし、写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2)$ を考える。Δ の T_A による像は、



$$\begin{aligned} T_A(\Delta) &= \{\ A\mathbf{a} + sA\mathbf{p} + tA\mathbf{q} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \} \\ &= \left\{\ \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} \ \middle|\ s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \right\} \end{aligned}$$

である。"$\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$" は一次独立であるから、$T_A(\Delta)$ は 3 点

$$A\mathbf{a} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

を頂点とする、$\mathbb{R}^2$ 内の三角形の周および内部である。 □

注意. 2 次正方行列 A の行列式 $|A|$ が 0 でない場合には、$\mathbb{R}^2$ 内の平行四辺形、三角形の周および内部は、線形写像 T_A のもとでそれぞれ平行四辺形、三角形の周および内部に写される。しかしながら、$|A| = 0$ の場合には線分に写されたり、1 点集合に写されるときがある。