§10. 逆行列と行列式

この節では、行列式の余因子展開の応用として、正方行列が正則であるためには、その行列式が 0 でないことが必要十分であることを示す。

● 10 - 1 : 余因子

前節において、行列式の余因子展開を説明した。n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ の行列式は、次のように表わされるのであった。

• $|A|$ の第 i 行に関する余因子展開：

(10 - 1 a)
$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1} a_{i1} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 i 行と第} \\ \text{1 列を取り除いたもの} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 i 行と第} \\ \text{2 列を取り除いたもの} \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 i 行と第} \\ \text{n 列を取り除いたもの} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

• $|A|$ の第 j 列に関する余因子展開：

(10 - 1 b)
$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+j} a_{1j} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 1 行と第} \\ \text{j 列を取り除いたもの} \end{vmatrix} + (-1)^{2+j} a_{2j} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 2 行と第} \\ \text{j 列を取り除いたもの} \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 n 行と第} \\ \text{j 列を取り除いたもの} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ここで、

(10 - 1 c)
$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \times \begin{vmatrix} \text{A から第 i 行と第 j 列を取り除いて} \\ \text{得られる $(n-1)$ 次正方行列} \end{vmatrix}$$

とおく。これを A の (i, j)-成分に対する**余因子**という ($\tilde{a}$ は「エイ ティルダ」と読む)。

(10 - 1 a), (10 - 1 b) を余因子を使って書き換えると、次のようになる。

定理 10 - 1 - 1

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ の行列式 $|A|$ ついて次式が成り立つ：
(1) $|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$ (第 i 行に関する余因子展開)
(2) $|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$ (第 j 列に関する余因子展開)
但し、$\tilde{a}_{ij}$ は A の (i, j)-成分に対する余因子である。

● 10 - 2 : 行列の正則性と行列式

正方行列が正則かどうかは、行列式を計算することにより判定することができる。この事実は第 6 節においてすでに、2 次正方行列と 3 次正方行列について導いている。

• 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

(10 - 2 a)
$$A \text{ が正則 (つまり、逆行列を持つ)} \iff |A| = ad - bc \neq 0$$

であり、このとき、

(10 - 2 b)
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であった。ここで、A^{-1} の成分について、

$$\begin{aligned} d &= (A \text{ の } (1,1)\text{-成分に対する余因子}), \\ -b &= (A \text{ の } (2,1)\text{-成分に対する余因子}), \\ -c &= (A \text{ の } (1,2)\text{-成分に対する余因子}), \\ a &= (A \text{ の } (2,2)\text{-成分に対する余因子}) \end{aligned}$$

となっていることに注意しよう。

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して、

(10 - 2 c)
$$\begin{aligned} &A \text{ が正則} \\ &\iff |A| = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \neq 0 \end{aligned}$$

であり、このとき、

(10 - 2 d)
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 & b_3c_1 - c_3b_1 & b_1c_2 - c_1b_2 \\ c_2a_3 - a_2c_3 & c_3a_1 - a_3c_1 & c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_2b_3 - b_2a_3 & a_3b_1 - b_3a_1 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$$

であった。ここで、A^{-1} の成分について、

$$\begin{aligned} b_2c_3 - c_2b_3 &= (A \text{ の } (1,1)\text{-成分に対する余因子}), \\ b_3c_1 - c_3b_1 &= (A \text{ の } (2,1)\text{-成分に対する余因子}), \\ b_1c_2 - c_1b_2 &= (A \text{ の } (3,1)\text{-成分に対する余因子}), \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ a_1b_2 - b_1a_2 &= (A \text{ の } (3,3)\text{-成分に対する余因子}) \end{aligned}$$

となっていることに注意しよう。

上で観察した現象は、n 次正方行列に対して成立する。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 10 - 2 - 1

n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ が逆行列を持つための必要十分条件はその行列式 $|A|$ が 0 でないことである。さらに、逆行列 A^{-1} は行列式を用いて次の式で与えられる。

(10 - 2 e)
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

但し、$\tilde{a}_{ij}$ は A の (i,j)-成分に対する余因子である。

注意 1：(10 - 2 e) の右辺の行列の添え数の並び方が A とは違うことに注意。

注意 2：逆行列を求めるための [定理 10 - 2 - 1] の公式は、計算量が多すぎるので、実際の計算には第 8 節で説明したように、$(A \mid E_n)$ を行基本変形して求めた方がよい。

例 10 - 2 - 2　a を実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & -2 & 2 \\ -3 & a+5 & -3 \\ -3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ を考える。A が正則でなくなるときの a の値を求めよう。そのために行列式を計算する。

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a-1 & -2 & 2 \\ a-1 & a+5 & -3 \\ a-1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} \quad (\because \text{第 1 列に足しあげる}) \\
&= (a-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & a+5 & -3 \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} \quad (\because \text{第 1 列から } a-1 \text{ をくくり出す}) \\
&= (a-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & a+7 & -5 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} \quad (\because ①\times(-1)+②,\ ①\times(-1)+③) \\
&= (a-1)\begin{vmatrix} a+7 & -5 \\ 2 & a \end{vmatrix} \quad (\because \text{第 1 列に関して余因子展開}) \\
&= (a-1)\big((a+7)a-(-5)\cdot 2\big) = (a-1)(a+2)(a+5)
\end{aligned}$$

であるから、A が正則でないのは $|A| = 0$ を解いて、$a = 1, -2, -5$ のときである (逆に言えば、a が $1, -2, -5$ 以外の値であれば、A はすべて正則になる)。 □

● 10 - 3 : 行列の積と行列式

正方行列の積と行列式との間には、次の定理に示すような、美しい関係がある。この定理は、[定理 10 - 2 - 1] を証明するために使われる。

定理 10 - 3 - 1

n 次正方行列 A と B との積 AB の行列式は A の行列式と B の行列式 との積である。すなわち、

(10 - 3 a)
$$|AB| = |A||B|.$$

$n = 2$ の場合に、上の定理が成り立つことは簡単に確かめられる。$n = 3$ の場合も、少し複雑になるが、同様の方法で証明することができる。しかし、一般の n に対して、[定理 10 - 3 - 1] を同様の方法で証明することは難しい。少し工夫が必要である。以下、その証明のあらすじを述べる。まず、$B = (b_{ij})$ とおき、行列 $\begin{pmatrix} A & \mathrm{O} \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ を考える。この行列に対して、$j = 1, \cdots, n$ にわたり、第 1 列の b_{1j} 倍、第 2 列の b_{2j} 倍、…、第 n 列の b_{nj} 倍を第 $n+j$ 列に加える、という基本変形を行う。すると、行列 $\begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ が得られる。さらに、この行列に対して、第 1 行と第 $n+1$ 行を入れ替えて、第 2 行と第 $n+2$ 行を入れ替えて、…、第 n 行と第 $2n$ 行を入れ替えるという基本変形を行う。すると、$\begin{pmatrix} -E_n & \mathrm{O} \\ A & AB \end{pmatrix}$ という行列が得られる。したがって、

$$\begin{vmatrix} A & \mathrm{O} \\ -E_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & \mathrm{O} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E_n & \mathrm{O} \\ A & AB \end{vmatrix}$$

が成り立つ。[例 9 - 1 - 1] により、最左辺は $|A||B|$ に、最右辺は、$|-E_n| = (-1)^n$ により、$|AB|$ に一致することから、[定理 10 - 3 - 1] の等式が得られる。

例 10 - 3 - 2　n 次正方行列 A が $A^{\mathrm{T}}A = E_n$ を満たすとき、$|A|$ の取り得る値は $1, -1$ である。

(**証明**)

等式 $A^{\mathrm{T}}A = E_n$ の両辺の行列式をとると、$|A^{\mathrm{T}}A| = |E_n| = 1$ となる。左辺は、[定理 10 - 3 - 1] と行列式の性質 (Det5) より、$|A^{\mathrm{T}}A| = |A^{\mathrm{T}}| \cdot |A| = |A|^2$ となるから、$|A|^2 = 1$ を得る。よって、$|A| = \pm 1$ である。 □

● 10 - 4：[定理 10 - 2 - 1] の証明

A が逆行列を持つと仮定し、X をその逆行列とする。$AX = E_n$ である。この両辺の行列式をとると、[定理 10 - 3 - 1] から

$$|A||X| = |AX| = |E_n| = 1$$

となる。特に、$|A| \neq 0$ がわかる。(上式から、ついでに $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ となることもわかる。)

逆が成り立つことを示す。$|A|$ を第 i 行に関して余因子展開すれば

$$(☆) \qquad |A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$$

となる。一方、$i \neq k$ なる i と k に対しては

$$(★) \qquad a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{kn} = 0$$

となる (実際、この等式は、行列 A の第 k 行目を第 i 行目で置き換えた行列 A' を考え、行列式 $|A'|$ を第 k 行に関して余因子展開すると得られる)。

さて、等式 (☆) と (★) を i と k を 1 から n まで動かしたものすべてを考えると、それらは行列を用いて次のようにひとまとめに書くことができる：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

と置けば、上式は

$$A\tilde{A} = |A|E_n$$

と書き表わすことができる。$|A|$ の列に関する余因子展開を考えて、同様にして、

$$\tilde{A}A = |A|E_n$$

を得る。

よって、$|A| \neq 0$ ならば、$X = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ と置くことによって、$AX = XA = E_n$ が成り立つ。 □

No.10 2024年6月13日

線形代数1事前練習用演習問題

pre10-1. (行列式と行列の正則性)

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a-12 & -5 & 5 \\ 11 & a+4 & -11 \\ -7 & -7 & a \end{pmatrix}$ が正則でないのは、a がどんな値のときか？そのような a の値をすべて求めよ。

pre10-2. (行列の積と行列式)

(1) 4 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} a^2+d^2 & ac & bd & ad \\ ac & a^2+c^2+d^2 & ad & ac \\ bd & ad & b^2+d^2 & ab+cd \\ ad & ac & ab+cd & a^2+c^2 \end{pmatrix}$$

の行列式を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ c & d & a & 0 \\ 0 & 0 & d & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$ と転置行列 A^{T} との積を考えることにより求めよ。

(2) n 次正方行列 A が $A^2 = -A$ を満たしているとする。行列式 $|A|$ の取り得る値を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre10-1. [例 10-2-2] を参照。$|A| = 0$ となるときの a の値を求めればよい。

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a-12 & -5 & 5 \\ 11 & a+4 & -11 \\ -7 & -7 & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a-12 & 0 & 5 \\ 11 & a-7 & -11 \\ -7 & a-7 & a \end{vmatrix} \quad (\boxed{3} \times 1 + \boxed{2}) \\
&= (a-7)\begin{vmatrix} a-12 & 0 & 5 \\ 11 & 1 & -11 \\ -7 & 1 & a \end{vmatrix} \quad (\text{第 2 列から } (a-7) \text{ を括り出す}) \\
&= (a-7)\begin{vmatrix} a-12 & 0 & 5 \\ 11 & 1 & -11 \\ -18 & 0 & a+11 \end{vmatrix} \quad (② \times (-1) + ③) \\
&\overset{(\text{第 2 列に関して余因子展開})}{=} \cdots\cdots \\
&= (a-7)^2(a+6)
\end{aligned}$$

となる。したがって、A が正則でないような a の値は $-6, 7$ である。

pre10-2. [例 10-3-2] を参照。

(1) 計算により、$AA^{\mathrm{T}} = X$ となることがわかる。したがって、この両辺の行列式をとって、

$$|A|^2 = |A||A^{\mathrm{T}}| = |AA^{\mathrm{T}}| = |X|$$

を得る。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix} = ad(ad - bc)$$

であるから、$|X| = |A|^2 = a^2d^2(ad - bc)^2$ である。

(2) $A^2 = -A$ の両辺の行列式をとると、$|A|^2 = |A^2| = |-A|$ を得る。右辺の行列式は、(Det2) を n 回適用して、$(-1)^n|A|$ になることがわかる。よって、$|A|^2 = (-1)^n|A|$ である。$x = |A|$ とおいて、x について解くことにより、$|A| = 0, (-1)^n$ であることがわかる。

線形代数１・第 10 回 (2024 年 6 月 13 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第 10 回学習内容チェックシート 2024 年 6 月 13 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
n 次正方行列 A の (i,j)-成分に対する余因子とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の (i,j)-成分に対する余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とおくとき、

$$\tilde{a}_{11} = \boxed{},\ \tilde{a}_{12} = \boxed{},\ \tilde{a}_{21} = \boxed{},\ \tilde{a}_{22} = \boxed{}$$

  である。

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の (i,j)-成分に対する余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とおく。A が正則のとき、A の逆行列は行列式 $|A|$ および余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を用いて

$$A^{-1} = \boxed{}$$

  によって与えられる。ここで、各余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は以下のように計算される。

$$\tilde{a}_{11} = \boxed{},\quad \tilde{a}_{21} = \boxed{},\quad \tilde{a}_{31} = \boxed{},$$
$$\tilde{a}_{12} = \boxed{},\quad \tilde{a}_{22} = \boxed{},\quad \tilde{a}_{32} = \boxed{},$$
$$\tilde{a}_{13} = \boxed{},\quad \tilde{a}_{23} = \boxed{},\quad \tilde{a}_{33} = \boxed{}$$

- n 次正方行列 A, B に対して、行列式 $|AB|, |A|, |B|$ の間には等式 $\boxed{}$ が成り立つ。特に、正則行列 A に対しては $|A^{-1}| = \boxed{}$ が成り立つ。

Q3. $\begin{pmatrix} a-1 & -2 & 2 \\ -3 & a+5 & -3 \\ -7 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ のように、行列の成分の中に未知の定数 a が含まれる場合、その行列が正則でなくなるような a の値を求めるためにはどうすればよいか。１つの解決方法・方針を示しなさい。

$\boxed{}$

Q4. 第 10 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。