§10. 抽象ベクトル空間

数列や関数や多項式に関する一部の問題は、それを行列とベクトルの言葉に翻訳することにより解くことができる。そのようなことができるようにするために、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ が持つ和とスカラー倍の性質を抽出して得られる抽象ベクトル空間の概念を導入しよう。ここでは、その定義と数列全体からなる集合や実数値関数全体からなる集合を始めとする、さまざまなベクトル空間の例を学ぶ。

● 10 - 1 : ベクトル空間の例

(抽象) ベクトル空間の定義を与える前に、その典型例をいくつか紹介する。

例 10 - 1 - 1 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ を成分が実数であるような (m, n)-行列全体からなる集合とする。$\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ には、和とスカラー倍が次のように定義される：$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}$ に対して、

(10 - 1 a)
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad tA = (ta_{ij}).$$

この和とスカラー倍は次を満たす：任意の $A, B, C \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}),\ s, t \in \mathbb{R}$ に対して

- $(A + B) + C = A + (B + C),\ A + B = B + A.$
- $s(A + B) = sA + sB,\ (s + t)A = sA + tA,\ (st)A = s(tA)$
- $1A = A.$

さらに、次も成り立つ：$\mathrm{O} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ を零行列とすると、

- 任意の $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ に対して、$A + \mathrm{O} = A = \mathrm{O} + A.$
- $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ に対して $-A = (-a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ と定めると、
  $A + (-A) = \mathrm{O} = (-A) + A.$

例 10 - 1 - 2 $\mathbb{R}[x]$ を係数が実数であるような 1 変数多項式全体からなる集合とする：

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \;\middle|\; a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{Z},\ d \geq 0 \right\}.$$

$\mathbb{R}[x]$ には和とスカラー倍が次のように定義される：

(10 - 1 b)
$$\sum_{i=0}^{d} a_i x^i + \sum_{i=0}^{d'} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max\{d,d'\}} (a_i + b_i)x^i, \quad t \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = \sum_{i=0}^{d} (ta_i)x^i \quad (t, a_i, b_i \in \mathbb{R}).$$

但し、和の定義の右辺において、$i > d'$ を満たす i に対しては $a_i = 0$ と $i > d$ を満たす i に対しては $b_i = 0$ と約束する。

上記の和とスカラー倍は次を満たす：任意の $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x],\ s, t \in \mathbb{R}$ に対して

- $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)),\ f(x) + g(x) = g(x) + f(x).$
- $s(f(x) + g(x)) = sf(x) + sg(x),\ (s + t)f(x) = sf(x) + tf(x),\ (st)f(x) = s(tf(x)).$
- $1f(x) = f(x).$

さらに、次も成り立つ：零定数多項式 $0 \in \mathbb{R}[x]$ を考えると、

- 任意の $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して、$f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x).$
- $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ に対して $-f(x) = \sum_{i=0}^{d} (-a_i)x^i \in \mathbb{R}[x]$ と定めると、
  $f(x) + (-f(x)) = 0 = (-f(x)) + f(x).$

例 10 - 1 - 3 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ を実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体からなる集合とする。$\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ には和とスカラー倍が次のように定義される：$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}$ に対して、

(10 - 1 c) $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad t\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ta_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

この和とスカラー倍は次を満たす：任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R}),\ s, t \in \mathbb{R}$ に対して

- $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) + \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + (\{b_n\}_{n=1}^{\infty} + \{c_n\}_{n=1}^{\infty})$,
  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} + \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $s(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) = s\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + s\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
  $(s+t)\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = s\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + t\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ (st)\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = s(t\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$
- $1\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

さらに、次も成り立つ：数列 $\{0_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ を $0_n = 0\ \ (n = 1, 2, \cdots)$ によって定めると、

- 任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ に対して、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{0_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0_n\}_{n=1}^{\infty} + \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ に対して $-\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ と定めると、
  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + (-\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{0_n\}_{n=1}^{\infty} = (-\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) + \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

例 10 - 1 - 4 K を空でない集合とし、$\mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ を K から $\mathbb{R}$ への写像全体からなる集合とする。$\mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ には、和とスカラー倍が次のように定義される：$f, g \in \mathrm{Map}(K, \mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}$ に対して、

(10 - 1 d) $$(f+g)(k) = f(k) + g(k), \qquad (tf)(k) = tf(k) \quad (k \in K).$$

この和とスカラー倍は次を満たす：任意の $f, g, h \in \mathrm{Map}(K, \mathbb{R}),\ s, t \in \mathbb{R}$ に対して

- $(f+g)+h = f+(g+h),\ f+g = g+f$.
- $s(f+g) = sf + sg,\ (s+t)f = sf + tf,\ (st)f = s(tf)$
- $1f = f$.

さらに、次も成り立つ：写像 $\underline{0} \in \mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ を $\underline{0}(k) = 0\ \ (k \in K)$ によって定めると、

- 任意の $f \in \mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ に対して、$f + \underline{0} = f = \underline{0} + f$.
- $f \in \mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ に対して $-f \in \mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ を $(-f)(k) = -f(k)\ (k \in K)$ によって定めると、$f + (-f) = \underline{0} = (-f) + f$.

● 10 - 2： ベクトル空間の定義

集合 $V (\neq \varnothing)$ に対して、**和** (または**加法**) と呼ばれる写像 $+ : V \times V \longrightarrow V,\ (u, v) \longmapsto u + v$ と、**スカラー倍** (または**作用**) と呼ばれる写像 $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto t \cdot v$ が定義されていて、以下の条件を満たすとき、V を $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間**または**実ベクトル空間**という。

(VS1) 任意の $u, v, w \in V$ および任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(ii) $u + v = v + u$.

(iii) $t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v$.

(iv) $(s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$.

(v) $(st) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$.

(vi) $1 \cdot v = v$.

(VS2) 次の条件を満たす元 $0_V \in V$ が存在する：任意の $v \in V$ に対して、

$$v + 0_V = v = 0_V + v.$$

(VS3) 任意の $v \in V$ に対して次の条件を満たす元 $x \in V$ が存在する：

$$v + x = x + v = 0_V \quad \text{（但し、}0_V\text{ は (VS2) と同じ }V\text{ の元）}.$$

注意 1°. しばしば“V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする”という言い方をすることがある。この場合には、集合 V 上に、上の条件を満たす和 $+$ とスカラー倍 $\cdot$ が1組指定されていると考える。
注意 2°. ベクトル空間 V の元を V の**ベクトル**と呼ぶ。
注意 3°. スカラー倍 $t \cdot v$ $(t \in \mathbb{R},\ v \in V)$ を tv と書くことが多い。
注意 4°. (VS1-i) から、n 個のベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ に対して、和 $v_1 + v_2 + \cdots + v_n \in V$ が括弧の付け方によらずに定まる。特に、$v_1 = \cdots = v_n = v$ のとき、$v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ を nv と書く。

[例 10-1-1], [例 10-1-2], [例 10-1-3], [例 10-1-4] で与えられている集合はそれぞれ (10-1 a), (10-1 b), (10-1 c), (10-1 d) によって定義される和、スカラー倍に関して実ベクトル空間になる。今後、特に断りのない限り、(m,n)-行列全体 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$, 実数係数の1変数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$, 実数列の全体 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$, 集合 K $(\neq \varnothing)$ から $\mathbb{R}$ への写像全体 $\mathrm{Map}(K, \mathbb{R})$ はこのような和とスカラー倍の指定された実ベクトル空間として扱う。

補題 10-2-1
V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。このとき、
(1) (VS2) の性質を持つ元 0_V は一意的である。これを V の**零ベクトル**という。誤解の恐れのないときには、零ベクトル 0_V を単に、0 と書く。
(2) 各 $v \in V$ に対して (VS3) を満たす $x \in V$ は一意的である。この x を $-v$ と書く。
(3) $0_{\mathbb{R}}$ を実数の 0 とする。$v \in V,\ t \in \mathbb{R}$ に対して、

① $0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V$　①′ $t \cdot 0_V = 0_V$　② $-(-v) = v$　③ $(-t)v = -tv$　④ $t(-v) = -tv$

が成り立つ。特に、③と (VS1-vi) から $(-1)v = -v$ が成り立つ。

ベクトル空間の定義においては、加法 (=足し算) とスカラー倍しか定義されていない。しかし、減法 (=引き算) も次のようにして定義することができる。ベクトル空間 V の2元 u, v に対して、

$$u - v := u + (-v). \tag{10-2 a}$$

マイナスが含まれているベクトル同士の計算も通常の計算規則が成り立つ。例えば、$t \in \mathbb{R},\ u, v \in V$ に対して $t(u - v) = tu - tv$ が成り立つ。

● 10-3：部分空間

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V が与えられているとする。W を V の部分集合とすると、V には和 $+$ とスカラー倍 $\cdot$ が指定されているので、W の2元 w, w' に対して和 $w + w'$ を考えたり、W の元 w と実数 t に対してスカラー倍 tw を考えたりすることができる。しかし、$w + w', tw \in W$ になるとは限らない。もし、これがすべての $w, w' \in W$ とすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つな

らば、W は V の和 $+$ とスカラー倍 $\cdot$ に関して $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間になる。そこで次の定義を設ける。

定義 10-3-1
V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、W を V の部分集合とする。W が V の**部分 (ベクトル) 空間**であるとは、以下の 3 つの条件が成り立つときをいう。

(SS0) $0_V \in W$.
(SS1) 任意の $w, w' \in W$ に対して、$w + w' \in W$.
(SS2) 任意の $w \in W$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、$tw \in W$.

注意 10-3-2 W がベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ の部分空間のとき、V の和 $+ : V \times V \longrightarrow V$ とスカラー倍 $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ を、それぞれ $W \times W$, $\mathbb{R} \times W$ に制限して、

$$+_W : W \times W \longrightarrow W, \qquad (w, w') \longmapsto w + w'$$
$$\cdot_W : \mathbb{R} \times W \longrightarrow W, \qquad (t, w) \longmapsto tw$$

という、２つの写像を考えることができる。これらの写像が指定された W は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる。部分空間をベクトル空間として扱うときは、特別の断わり書きがない限り、この方法による。

例 10-3-3 ベクトル空間 V において V 自身は部分空間である。また、零ベクトルだけからなる集合 $\{0_V\}$ は V の部分空間である。

例 10-3-4 実数列のなすベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分集合

$$W = \{\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R}) \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は収束する } \}$$

は $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間である。

(**証明**)

(SS0) $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の零ベクトル $0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})}$ は、0 が並んだ数列 $\{0_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($0_n = 0$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$) である。$0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})} = \{0_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するので、$0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})} \in W$ である。

(SS1) 任意に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ をとると、これらは収束する。収束する数列の和も収束して $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ となるから、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ が成り立つ。

(SS2) 任意に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ と $t \in \mathbb{R}$ をとると、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。収束する数列の定数倍も収束して $\lim\limits_{n\to\infty}(ta_n) = t \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ となるから、$t\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ta_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ が成り立つ。

以上により、W は $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間である。 $\square$

例 10-3-5 $K = \mathbb{R}$ として、ベクトル空間 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を考える。$\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分集合

$$W_1 := \{\ f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ は連続である } \},$$
$$W_2 := \{\ f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ は積分可能である } \},$$
$$W_3 := \{\ f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ は微分可能である } \},$$
$$W_4 := \{\ f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ は 2 回微分可能であり、} f'' = -f\ \}$$

はどれも $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分空間である。

線形代数 2 事前練習用演習問題

pre10-1. (ベクトル空間の定義)

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。$v \in V,\ t \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立つことを示せ。

(1) $t \cdot 0_V = 0_V$.

(2) $t \cdot (-v) = -(t \cdot v)$.

pre10-2. (部分空間)

ベクトル空間 $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分集合

$$W = \left\{ f \in V \;\middle|\; f \text{ は 2 回微分可能であり、微分方程式 } \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \text{ を満たす} \right\}$$

は V の部分空間であることを示せ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre10-1.

(1)
$$\begin{aligned} t \cdot 0_V &= t \cdot (0_V + 0_V) \quad (\text{零ベクトルの定義より}) \\ &= t \cdot 0_V + t \cdot 0_V \quad (\text{スカラーの分配法則より}) \end{aligned}$$

であるから、この両辺に $-t \cdot 0_V$ を加えることにより、

$$\begin{aligned} 0_V &= t \cdot 0_V + (-t \cdot 0_V) \quad (-v \text{ の定義より}) \\ &= (t \cdot 0_V + t \cdot 0_V) + (-t \cdot 0_V) \\ &= t \cdot 0_V + \big(t \cdot 0_V + (-t \cdot 0_V)\big) \quad (\text{結合法則より}) \\ &= t \cdot 0_V + 0_V \quad (-v \text{ の定義より}) \\ &= t \cdot 0_V \quad (\text{零ベクトルの定義より}) \end{aligned}$$

を得る。

(2)
$$\begin{aligned} t \cdot (-v) + t \cdot v &= t \cdot ((-v) + v) \quad (\text{スカラーの分配法則より}) \\ &= t \cdot 0_V \quad (-v \text{ の定義より}) \\ &= 0_V \quad ((1) \text{ より}) \end{aligned}$$

を得る。これは、$-(t \cdot v)$ の定義より、$t \cdot (-v) = -(t \cdot v)$ であることを意味する。

pre10-2. (SS0) $0_V \in W$ を確かめる。V の零ベクトル 0_V は、$\underline{0}(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ によって関数 $\underline{0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ である (注：W の定義に書かれている微分方程式の右辺の 0 は正確にはこの関数 $\underline{0}$ のことを意味する)。これは 2 回微分可能であり、

$$\frac{d^2 0_V}{dx^2} + 0_V = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

を満たすから、$0_V \in W$ である。

(SS1) $f, g \in W$ を任意にとる。このとき、$f + g$ は 2 回微分可能であり、

$$\frac{d^2(f+g)}{dx^2} + (f+g) = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 g}{dx^2} + f + g = \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + f\right) + \left(\frac{d^2 g}{dx^2} + g\right) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

が成り立つ。よって、$f + g \in W$ である。

(SS2) を満たすことも (SS1) と同様に示すことができるから、解答は省略する。
以上により、W は V の部分空間であることが示された。

線形代数２・第 10 回 (2024 年 11 月 28 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第 10 回学習内容チェックシート 2024 年 11 月 28 日

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ______________________

Q1. 集合 V $(\neq \emptyset)$ 上に次の 2 つの写像が与えられているとする。

$$\text{和} + \ : V \times V \longrightarrow V,\ (u,v) \longmapsto u+v \qquad (u,v \in V),$$
$$\text{スカラー倍} \cdot \ : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto tv \qquad (t \in \mathbb{R},\ v \in V).$$

これらの和とスカラー倍に関して V が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間をなすため条件を列挙しなさい。

(VS1) $\boxed{}$ に対して、

- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$

(VS2) $\boxed{}$

(VS3) $\boxed{}$

Q2. 下の表を完成させなさい。中央の欄には各ベクトル空間 V に対する零ベクトル 0_V を、右側の欄には指定された $v \in V$ に対する $-v \in V$ を書きなさい。

V	0_V	$v \in V$ に対する $-v$
$M_2(\mathbb{R})$		$v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して $-v =$
$\mathbb{R}[x]$		$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ に対して $-v =$
$\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$		$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v(x) = e^x\ (x \in \mathbb{R})$ に対して $-v :$

Q3. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	定義
V の部分集合 W が V の部分空間であるとは？	p.	

Q4. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉あるいは記号を入れなさい。

- 任意のベクトル空間 V に対して、$\boxed{}$ および $\boxed{}$ は部分空間である。

Q5. 第 10 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。