

§10. 実正規行列の標準形

この節では、有限次元実計量空間 V 上の $\mathbb{R}$ -線形変換に対して、正規直交基底の下での標準形を求める問題を考える。この問題は、 n 次実正方行列 A に対して、直交行列 P を用いて $P^{-1}AP$ をどこまで簡単な形にすることができるか、という問題と同値である。ここでは、**実正規行列**(= 正規行列であって、成分が実数からなるもの) に対して、この問題を調べる。特に、直交行列と交代行列の場合の標準形を求める(対称行列に対しては次節で扱う)。

● 10-1 : 直交変換、対称変換、交代変換

実数成分の行列 A がそれぞれ、ユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列であるとき、 A はそれぞれ直交行列、対称行列、交代行列(歪対称行列)と呼ばれる。すなわち、

- $A \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列 $\iff A^T A = E_n$,
- $A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称行列 $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^T = A$,
- $A \in M_n(\mathbb{R})$ が交代行列 $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^T = -A$

である。これらは正規行列である。これらの行列に対応する、有限次元実計量空間 V 上の $\mathbb{R}$ -線形変換 T はそれぞれ直交変換、対称変換、交代変換と呼ばれる。すなわち、

- T が直交変換 $\stackrel{\text{def}}{\iff} T^* \circ T = \text{id}_V$,
- T が対称変換 $\stackrel{\text{def}}{\iff} T^* = T$,
- T が交代変換 $\stackrel{\text{def}}{\iff} T^* = -T$.

● 10-2 : 実正規行列の標準形

実正規行列の固有値は実数とは限らないので直交行列で対角化可能とは限らないが、正規行列なのでユニタリ行列で($\mathbb{C}$ の範囲内で)対角化することはできる。このことを用いて、実正規行列の直交行列による標準形を求めることができる。

定理 10-2-1

$A \in M_n(\mathbb{R})$ が実正規行列ならば、直交行列 $P \in M_n(\mathbb{R})$ を適当に選んで、 $P^{-1}AP$ を次の形の行列にすることができる：

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|c} a_1 & -b_1 & \\ \hline b_1 & a_1 & \\ \hline \end{array} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \begin{array}{cc|c} \hline a_r & -b_r & \\ \hline b_r & a_r & \\ \hline \end{array} & & & & \\ & & & c_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & c_{n-2r} & \end{pmatrix}$$

ここで、 $j = 1, \dots, r$ および $k = 1, \dots, n - 2r$ に対して $a_j, b_j, c_k \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$ である。

以下、しばらくの間、この定理を証明するための準備を行う。

補題 10-2-2

$A \in M_n(\mathbb{R})$ とする。

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の ($\mathbb{C}$ における) 固有値ならば、 $\bar{\lambda}$ も A の固有値であり、“ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ” が $W(\lambda, T_A)$ の (resp. 正規直交) 基底ならば、“ $\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_k$ ” は $W(\bar{\lambda}, T_A)$ の (resp. 正規直交) 基底である。但し、 $T_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ は A が定める $\mathbb{C}$ -線形変換である。

(2) A の ($\mathbb{C}$ における) 固有値のうち、実数でないもの (つまり、虚数のもの) は全部で偶数個あり、 $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_t, \beta_t$ をそのような固有値の全体とすると、適当な並べ換えにより、 $\beta_i = \overline{\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, t$) とすることができる。

(証明)

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ が正規行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値であるとする。 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ を A の固有値 λ に属する A の固有ベクトルとする。このとき、 $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ が成り立つ。この両辺の共役複素数をとると、 A が実行列であることから、 $A\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{u}}$ が成り立つ。 $\overline{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$ であるから、 $\overline{\lambda}$ はまた A の固有値になる。後半の主張は演習問題として残す。

(2) は (1) の前半部分の主張から直ちに従う。 $\square$

T を有限次元複素ベクトル空間 V 上の線形変換とし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ を T の相異なる固有値の全体とする。 T が対角化可能 (定義は第6節を参照) ならば、各固有空間 $W(\lambda_i, T)$ の基底 $\mathcal{B}_i$ をとり、それらを並べることにより、 V の基底を作ることができる。したがって、 V は

$$V = W(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus W(\lambda_s, T)$$

のように、 T の固有空間の直和に分解される。この事実と [補題 10-2-2] および正規行列が対角化可能であることを合わせて、次が示される。

命題 10-2-3

$A \in M_n(\mathbb{R})$ を正規行列とし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ を A の $\mathbb{R}$ 内の相異なる固有値の全体、 $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \dots, \alpha_t, \overline{\alpha_t}$ を A の $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ 内の相異なる固有値の全体とする。このとき、 $\mathbb{C}^n$ は

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n = & W(\lambda_1, T_A) \oplus \dots \oplus W(\lambda_s, T_A) \\ & \oplus W(\alpha_1, T_A) \oplus W(\overline{\alpha_1}, T_A) \oplus \dots \oplus W(\alpha_t, T_A) \oplus W(\overline{\alpha_t}, T_A) \end{aligned}$$

のように、 A から定まる $\mathbb{C}$ -線形変換 $T_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ の固有空間の直和に分解される。

補題 10-2-4

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、 T を V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換とする。 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が T の異なる固有値のとき、

(1) $W(\alpha, T), W(\beta, T)$ は V の中で直和である。

(2) V にエルミート内積が与えられ、 T が計量空間 V 上の正規変換であるとする、任意の $v \in W(\alpha, T)$ と任意の $w \in W(\beta, T)$ は直交する。

(証明)

(1) $v \in W(\alpha, T) \cap W(\beta, T)$ を任意にとると、 $\alpha v = T(v) = \beta v$ が成り立つ。よって、 $(\alpha - \beta)v = 0_V$ である。 $\alpha \neq \beta$ であるから $v = 0_V$ となる。したがって、 $W(\alpha, T) \cap W(\beta, T) = \{0_V\}$ となるから $W(\alpha, T), W(\beta, T)$ は V の中で直和である。

(2) $\langle T(v), w \rangle = \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ であり、一方、[補題 9-1-2] より、

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle = \langle v, \overline{\beta} w \rangle = \overline{\beta} \langle v, w \rangle$$

である。よって、 $(\alpha - \beta) \langle v, w \rangle = 0$ となる。 $\alpha \neq \beta$ であるから、 $\langle v, w \rangle = 0$ が従う。 $\square$

補題 10-2-5

$A \in M_n(\mathbb{R})$ とし、 $\alpha \in \mathbb{C}$ を実数でない A の固有値とする。 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) とおくと、 $W(\alpha, T_A) \oplus W(\overline{\alpha}, T_A) \subset \mathbb{C}^n$ の基底 “ $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ ” として、次の条件を満たすものがとれる：

(i) $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^n$ であり、これらの列は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。

$$(ii) \begin{cases} A\mathbf{p}_j = a\mathbf{p}_j + b\mathbf{q}_j, \\ A\mathbf{q}_j = -b\mathbf{p}_j + a\mathbf{q}_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, k).$$

A が実正規行列ならば、上の (i), (ii) に加えて、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ は互いに直交し、長さが 1 のベクトルに選ぶことができる。

(証明)

$\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ が A の固有値ならば、[補題 10-2-2(1)] より、 $\bar{\alpha}$ も A の固有値であり、 $\alpha \neq \bar{\alpha}$ である。よって、[補題 10-2-4(1)] より $W(\alpha, T_A)$ と $W(\bar{\alpha}, T_A)$ は $\mathbb{C}^n$ の中で直和になっている。

“ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ” を $W(\alpha, T_A)$ の基底とする。[補題 10-2-2(1)] より、“ $\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_k$ ” は $W(\bar{\alpha}, T_A)$ の基底となる。各 j ($j = 1, \dots, k$) に対して $\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^n$ を次のように定義する：

$$\mathbf{p}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_j + \bar{\mathbf{u}}_j), \quad \mathbf{q}_j = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_j - \bar{\mathbf{u}}_j).$$

このとき、“ $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ ” は $W(\alpha, T_A) \oplus W(\bar{\alpha}, T_A)$ に属している $\mathbb{R}$ 上一次独立なベクトルの組であるから、 $W(\alpha, T_A) \oplus W(\bar{\alpha}, T_A)$ の基底になる。さらに、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} A\mathbf{p}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A\mathbf{u}_j + A\bar{\mathbf{u}}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_j\mathbf{u}_j + \bar{\alpha}_j\bar{\mathbf{u}}_j) = a\mathbf{p}_j + b\mathbf{q}_j \\ A\mathbf{q}_j &= \frac{i}{\sqrt{2}}(A\mathbf{u}_j - A\bar{\mathbf{u}}_j) = \frac{i}{\sqrt{2}}((\alpha_j\mathbf{u}_j - \bar{\alpha}_j\bar{\mathbf{u}}_j)) = a\mathbf{q}_j - b\mathbf{p}_j. \end{aligned}$$

次に、 A が実正規行列の場合、“ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ” を $W(\alpha, T_A)$ の正規直交基底に選んで、上のように $W(\alpha, T_A) \oplus W(\bar{\alpha}, T_A)$ の基底 “ $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ ” を作る。すると、これは $W(\alpha, T_A) \oplus W(\bar{\alpha}, T_A)$ の正規直交基底であることがわかる。

∴)

[補題 10-2-2(1)] より、“ $\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_k$ ” は $W(\bar{\alpha}, T_A)$ の正規直交基底である。 $A \in M_n(\mathbb{R})$ は正規行列なので、 T_A の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するから、任意の $\mathbf{u}_i$ と任意の $\bar{\mathbf{u}}_j$ は直交する。したがって、

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \frac{1}{2}(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle + \langle \mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_j \rangle + \langle \bar{\mathbf{u}}_i, \mathbf{u}_j \rangle + \langle \bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_j \rangle) = \delta_{ij}$$

であり、同様に、 $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j \rangle = 0$ である。□

これで補題は証明された。□

補題 10-2-6

$A \in M_n(\mathbb{R})$ とし、 $\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値とする。このとき、 $T_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ の固有空間 $W(\lambda, T_A)$ の基底として、成分が実数からなり、 $\mathbb{R}$ 上一次独立なものをとることができる。

(証明)

$k = \dim W(\lambda, T_A)$ とおくと、

$$k = \dim W(\lambda, T_A) = \dim(\text{Ker}(T_A - \lambda E_n)) = n - \text{rank}(A - \lambda E_n)$$

である。一方、 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ であるから、 $\mathbb{R}$ -線形写像 $T_A|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ に対しても同様に、次が成り立つ：

$$\dim W(\lambda, T_A|_{\mathbb{R}^n}) = n - \text{rank}(A - \lambda E_n) = k.$$

今、 $W(\lambda, T_A|_{\mathbb{R}^n})$ の 1 組の基底 “ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ” をとると、各 $\mathbf{x}_i$ は $W(\lambda, T_A)$ の元とみなすことができ、“ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ” は $\mathbb{C}$ 上一次独立でもある。よって、これは $W(\lambda, T_A)$ の基底である。□

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre10-1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ のとき、 A が定める $\mathbb{R}$ -線形変換 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は回転移動を表わす。その回転軸と回転角を求めよ。

注意. 直交行列 $A \in M_3(\mathbb{R})$ が適当な直交行列 P により、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

と表わされたとする。 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ により $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を定めると、

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = (\cos \theta)\mathbf{p}_1 + (\sin \theta)\mathbf{p}_2, \\ A\mathbf{p}_2 = (-\sin \theta)\mathbf{p}_1 + (\cos \theta)\mathbf{p}_2, \\ A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3 \end{cases}$$

が成り立つ。これは、 $\mathbb{R}$ -線形変換 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が原点を通り、 $\mathbf{p}_3$ を方向ベクトルに持つ直線 ℓ を軸とする回転移動を表わすことを意味する (T_A は、詳しくは、 $\mathbf{p}_3$ 方向に右ねじが進むとき、その回転する方向に θ だけ回転するような回転移動である)。

ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre10-1. まず、 A の列ベクトルは互いに直交し、大きさが 1 であるから A は直交行列である。 A の固有多項式 $\Delta_A(x)$ を計算すると、 $\Delta_A(x) = (x-1)(x^2+1)$ のように因数分解されることがわかる。したがって、 A の固有値は $1, \pm i$ である。 1 を固有値に持つことから、ある適当な直交行列 P により $P^{-1}AP$ は上の注意のような行列になることがわかる。したがって、 T_A は回転移動である。

$\alpha = i$ とおき、 A が定める $\mathbb{C}$ -線形変換 $T_A^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ を考える。 $\mathbb{C}^3$ は $\mathbb{C}^3 = W(1, T_A^{\mathbb{C}}) \oplus W(\alpha, T_A^{\mathbb{C}}) \oplus W(\bar{\alpha}, T_A^{\mathbb{C}})$ のように直和分解される。 $W(\alpha, T_A^{\mathbb{C}})$ の正規直交基底 " $\mathbf{u}_1$ " を任意に 1 つとり、

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_1 + \bar{\mathbf{u}}_1), \quad \mathbf{q}_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1)$$

と定めると、[補題 10-2-5] の証明より、" $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$ " は $W(\alpha, T_A^{\mathbb{C}}) \oplus W(\bar{\alpha}, T_A^{\mathbb{C}})$ の正規直交基底であり、

$$A\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1, \quad A\mathbf{q}_1 = -\mathbf{p}_1$$

が満たされる。一方、[補題 10-2-6] より、 $W(1, T_A^{\mathbb{C}})$ の正規直交基底として成分が実数からなるものをとることができる。実際、その正規直交基底として " $\mathbf{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ " をとることができる。 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{q}_1 \ \mathbf{r})$ と定めると、 P は直交行列であり、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるか

ら、 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の回転軸は原点を通る直線 $\ell = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ であり、回転角は $\alpha = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{2}$ である。

第 10 回 (2025 年 6 月 16 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. T を有限次元実計量空間 V 上の $\mathbb{R}$ -線形変換とする。 T が直交変換、対称変換、交代変換であるとはそれぞれどのような条件が満たされるときをいうか？その条件を書け。

(1) 直交変換： _____

(2) 対称変換： _____

(3) 交代変換： _____

Q2. T を有限次元複素ベクトル空間 V 上の $\mathbb{C}$ -線形変換とする。 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ を T の相異なる固有値の全体とする。

(1) T が対角化可能であるとはどのような条件が満たされるときをいうか。その条件を書け。

(2) 上で書いた条件の、固有空間を用いた言い換えを書け。

Q3. $A \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列のとき、適当な直交行列 P により $P^{-1}AP$ をどのような形の行列にまで単純にすることができるか。 $n=2$ と $n=3$ のそれぞれの場合に記せ。

(1) $n=2$ のとき

(2) $n=3$ のとき

Q4. $A \in M_n(\mathbb{R})$ が交代行列のとき、適当な直交行列 P により $P^{-1}AP$ をどのような形の行列にまで単純にすることができるか。 $n=2$ と $n=3$ のそれぞれの場合に記せ。

(1) $n=2$ のとき

(2) $n=3$ のとき

Q5. 第10回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。